



Décomposition sous-directe d'un treillis en facteurs irréductibles

Jean-François Viaud, Karell Bertet, Christophe Demko, Rokia Missaoui

► To cite this version:

Jean-François Viaud, Karell Bertet, Christophe Demko, Rokia Missaoui. Décomposition sous-directe d'un treillis en facteurs irréductibles. Journées francophones d'Ingénierie des Connaissances IC2015, Jun 2015, Rennes, France. hal-01169541

HAL Id: hal-01169541

<https://hal.science/hal-01169541>

Submitted on 1 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Décomposition sous-directe d'un treillis en facteurs irréductibles

Jean-François Viaud¹, Karell Bertet¹, Christophe Demko¹, Rokia Missaoui²

¹ Laboratoire L3i, Université de La Rochelle, France
{jviaud, kbertet, cdemko}@univ-lr.fr

² Université du Québec en Outaouais, Canada
rokia.missaoui@uqo.ca

Abstract : La taille d'un treillis de concepts peut augmenter de façon exponentielle avec la taille du contexte. Lorsque le nombre de noeuds devient important, l'étude et la génération d'un tel treillis devient impossible. Décomposer le treillis en petit sous-treillis est un moyen de contourner ce problème. Dans la décomposition sous-directe, les petits sous-treillis générés sont des quotients qui ont une interprétation intéressante dans le cadre de l'Analyse de Concepts Formels.

Dans cet article, nous présentons les étapes pour obtenir une décomposition sous-directe en treillis irréductibles, en partant d'un contexte fini et réduit. Cette décomposition est obtenue en utilisant trois points de vue : les treillis quotients, les relations flèches et les sous-contextes compatibles. Cette approche est essentiellement algébrique car elle repose sur la théorie des treillis, sauf pour le dernier point. Nous donnons un algorithme polynomial permettant de générer cette décomposition à partir d'un contexte initial. Cette méthode peut être étendue pour permettre l'exploration interactive ou la fouille dans de grands contextes.

Mots-clés : treillis de concepts, relation de congruence, treillis quotient, relation flèche, sous-contexte flèche fermé, sous-contexte compatible

1 Introduction

Au cours de la dernière décennie, l'augmentation de capacités de calcul ont permis le développement de l'Analyse des Concepts Formels (*Formal Concept Analysis*, FCA) à travers de nouvelles méthodes basées sur les treillis de concepts. Bien qu'ils soient de taille exponentielle en espace et temps dans le pire des cas, dans la pratique, les treillis de concepts sont d'une taille raisonnable et permettent une représentation intuitive des données stockées dans un contexte qui relie les objets aux attributs à travers une relation binaire. Les méthodes basées sur les treillis de concepts ont été développées dans différents domaines tels que la découverte et la représentation des connaissances, les bases de données ou la recherche d'information où certains concepts pertinents, par exemple les correspondances possibles entre les objets et les attributs sont considérés soit comme des classificateurs, soit comme des hiérarchies.

Avec l'accroissement de la taille des données, plusieurs méthodes ont été développées pour permettre de générer seulement quelques concepts et leurs voisinages de manière interactive (Ferré, 2014; Visani *et al.*, 2011) et en ligne, ou pour permettre de meilleures visualisations à l'aide des diagrammes imbriqués (*nested line diagrams* (Ganter & Wille, 1999)). Cependant, l'idée principale d'une décomposition du treillis ou du contexte en plus petits éléments reste valable à condition que les propriétés de classification du treillis initial soient conservées. Beaucoup de décompositions de treillis ont été définies et étudiées, à la fois du point de vue algébrique (Demel, 1982; Mihók & Semanišin, 2008) et du point de vue de la FCA (Ganter & Wille, 1999; Funk *et al.*, 1995). Parmi ces décompositions, on distingue : le théorème de factorisation

(Mihók & Semanišin, 2008), la décomposition atlas (Ganter & Wille, 1999), la décomposition subtensorielle (Ganter & Wille, 1999), les méthodes de doublement de convexe (Day, 1994; Nation, 1995; Geyer, 1994; Bertet & Caspard, 2002) ou bien encore la décomposition sous-directe. Cette dernière a été largement étudiée, il y a quelques années, dans le cadre de l'algèbre universelle (Demel, 1982; Freese, 2008), mais aussi dans le cadre de la FCA (Wille, 1969, 1976, 1983, 1987) et (Funk *et al.*, 1995). A notre connaissance, il n'y a pas de nouveaux développements ou de nouveaux algorithmes pour la décomposition sous-directe de contextes.

Dans cet article, nous étudions la décomposition sous-directe d'un treillis de concepts, considérée comme une première étape à l'exploration interactive et à la fouille dans de grands contextes. La décomposition sous-directe d'un treillis L en treillis quotients $(L_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, peut être notée $L \hookrightarrow L_1 \times \dots \times L_n$, et est définie par deux propriétés (résultats importants dans (Ganter & Wille, 1999)) : (i) L est un sous-treillis du treillis produit-direct $L_1 \times \dots \times L_n$ et (ii) chaque projection de L sur un facteur est surjective (Ganter & Wille, 1999). Dans un premier temps, il est établi que chaque facteur est le treillis de concepts d'un sous-contexte flèche-fermé, c'est-à-dire fermé en regard de relations flèches entre objets et attributs. Cela signifie que cette décomposition peut être obtenue en calculant certains sous-contextes particuliers. Dans un second temps, l'équivalence entre les sous-contextes flèche-fermés et les relations de congruence est établie; une relation de congruence étant une relation d'équivalence compatible avec les opérations du treillis. Cela signifie que les concepts de L peuvent être retrouvés à partir des treillis quotients et que la propriété de classification du treillis initial est maintenue puisque les relations d'équivalence forment une partition de l'ensemble des concepts. Enfin, est formulée l'équivalence entre les sous-contextes flèche-fermés et les sous-contextes compatibles, c'est à dire les sous-contextes dont les concepts correspondent aux concepts du treillis initial. Ce résultat nous permet de calculer le morphisme de L dans le produit direct et ainsi de retrouver les concepts de L dans les treillis quotients. Dans ce papier, nous déduisons de ces résultats un lien très fort, entre les notions suivantes, qui, à notre connaissance, n'a pas été utilisé :

- les treillis intervenant dans la décomposition sous-directe;
- les relations de congruences;
- les sous-contextes flèche-fermés et;
- les sous-contextes compatibles.

Comme suggéré dans (Ganter & Wille, 1999), les contextes définissant les treillis d'une décomposition sous-directe particulière, i.e. les contextes irréductibles, peuvent être obtenus à l'aide d'un traitement polynomial sur les lignes/objets (ou colonnes/attributs) du contexte initial. Ainsi, la décomposition sous-directe d'un treillis peut être étendue à une décomposition sous-directe de son contexte réduit en sous-contextes irréductibles.

Dans cet article, nous proposons une décomposition sous-directe polynomiale d'un contexte en sous-contextes en étendant la décomposition sous-directe d'un treillis. Cette décomposition conduit à une économie de stockage des données pour les grands contextes. En effet, la génération de l'ensemble complet des treillis quotients peut être évitée en fournissant de manière interactive quelques (mais pas tous) concepts et leurs voisinages dans un grand contexte. De plus, il est possible de proposer à l'utilisateur de se concentrer sur un treillis quotient particulier et de générer ce treillis intégralement ou partiellement, ainsi que ses bases d'implications.

Il y a au moins deux raisons d'étudier ce cas de gestion des connaissances. La première tient au fait que l'utilisateur peut être submergé par la connaissance extraite des données, même dans le cas où la taille des données en entrée est faible. La seconde raison vient des progrès de la communauté FCA dans la construction et l'exploration des treillis de concepts. Les solutions existantes peuvent être désormais adaptées et enrichies pour cibler uniquement la connaissance utile.

Cet article est organisé de la manière suivante. La section 2 introduit la décomposition sous-directe et les trois différents points de vue : les treillis quotients, les relations flèches et les sous-contextes compatibles. La section 3 présente la construction complète de la décomposition sous-directe et les algorithmes. La section 4 donne les conclusions et perspectives.

2 Cadre structurel

Tout au long de ce papier, tous les ensembles (et en particulier les treillis) seront supposés finis.

2.1 Treillis et Analyse des Concepts Formels

2.1.1 Treillis algébriques

Commençons par rappeler qu'un *treillis* $(L, \leq)$ est un ensemble ordonné dans lequel toute paire (x, y) d'éléments possède une borne supérieure, notée $x \vee y$, et une borne inférieure, notée $x \wedge y$. Comme nous ne considérons que des structures finies, toute partie $A \subset L$ possède une borne supérieure et une borne inférieure (i.e. les treillis finis sont complets).

Un élément $j \in L$ est dit *sup-irréductible* s'il n'est pas borne supérieure d'un ensemble qui ne le contient pas. L'ensemble des sup-irréductibles est noté J_L . Les *inf-irréductibles* sont définis dualement et leur ensemble est M_L . En conséquence directe de la définition, un élément $j \in L$ est sup-irréductible si et seulement s'il possède un unique prédécesseur; ce dernier est alors noté j^- . Dualement, un élément $m \in L$ est inf-irréductible si et seulement s'il admet un unique successeur qui est alors noté m^+ .

Sur la figure 1, les sup-irréductibles sont notés avec des nombres et les inf-irréductibles avec des lettres.

2.1.2 Treillis de Concepts ou de Galois

Un *contexte* formel (O, A, R) est défini par la donnée d'un ensemble O d'objets, d'un ensemble A d'attributs, et d'une relation binaire $R \subset O \times A$, entre O et A . On déduit deux opérateurs de la donnée d'un tel contexte :

- pour toute partie $X \subset O$, on pose $X' = \{m \in A, j R m \forall j \in X\}$ et dualement,
- pour toute partie $Y \subset A$, on pose $Y' = \{j \in O, j R m \forall m \in Y\}$.

Un *concept* formel correspond à un rectangle maximal de la relation R et est défini par la paire (X, Y) telle que $X' = Y$ et $Y' = X$. Les ensembles X et Y sont respectivement appelés *extension* et *intention* du concept. L'ensemble des concepts issus d'un contexte est ordonné par la relation :

$$(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2) \iff X_1 \subset X_2 \iff Y_2 \subset Y_1$$

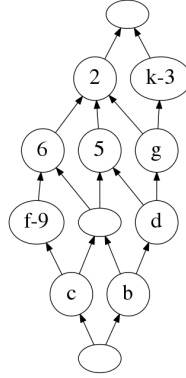


Figure 1: Un treillis avec ses noeuds irréductibles.

Cet ensemble de concepts formels muni de cette relation d'ordre constitue un treillis complet, appelé *treillis de concepts* ou *treillis de Galois* du contexte (O, A, R) .

Des contextes formels différents peuvent engendrer des treillis isomorphes. Parmi tous les contextes ayant un même treillis de concepts, il en existe un unique et minimal (en nombre d'observations et attributs), appelé *contexte réduit*.

2.1.3 Bijection fondamentale

Un résultat fondamental (Barbut & Monjardet, 1970) affirme que tout treillis $(L, \leq)$ est isomorphe au treillis de concepts du contexte $(J_L, M_L, \leq)$, où J_L est l'ensemble des sup-irréductibles de L et M_L celui de ses inf-irréductibles. De plus, ce contexte est le contexte réduit. On en déduit immédiatement une bijection entre l'ensemble des treillis et l'ensemble des contextes réduits où les objets correspondent aux concepts sup-irréductibles et les attributs aux concepts inf-irréductibles.

La figure 2 montre le contexte réduit du treillis de la figure 1.

2.2 Sous-contextes flèche-fermés et compatibles

Dans cette section est présentée l'équivalence entre les sous-contextes compatibles et les sous-contextes flèche-fermés.

2.2.1 Sous-contextes Compatibles

Un *sous-contexte* d'un contexte formel (O, A, R) est un triplet $(J, M, R \cap J \times M)$ tel que $J \subset O$ et $M \subset A$. Un sous-contexte $(J, M, R \cap J \times M)$ de (O, A, R) est *compatible* lorsque pour tout concept (H, N) de (O, A, R) , le couple $(J \cap H, M \cap N)$ est un concept de $(J, M, R \cap J \times M)$.

2.2.2 Relations flèches

Les sous-contextes flèche-fermés intervenant dans l'équivalence sont basés sur les relations flèches entre les concepts sup et inf-irréductibles du treillis. Soit $(J_L, M_L, \leq)$ le contexte réduit

	b	c	d	f	g	k
2	×	×	×	×	×	↕
3	×	↕	×	↑	×	×
5	×	×	×	↕	↕	○
6	×	×	↕	×	↓	○
9	↕	×	○	×	○	○

Figure 2: Le contexte réduit du treillis de la figure 1 avec les relations flèches.

du treillis $(L, \leq)$. Les relations flèches (Crawley & Dilworth, 1973; Grätzer, 1978) forment une partition de la relation $\not\leq$ en considérant le prédécesseur immédiat j^- d'un sup-irréductible j et le successeur immédiat m^+ d'un inf-irréductible m :

- $j \uparrow m$ si $j \not\leq m$, $j \leq m^+$ et $j^- \leq m$.
- $j \uparrow m$ si $j \not\leq m$, $j \leq m^+$ et $j^- \not\leq m$.
- $j \downarrow m$ si $j \not\leq m$, $j \not\leq m^+$ et $j^- \leq m$.
- $j \circ m$ si $j \not\leq m$, $j \not\leq m^+$ et $j^- \not\leq m$.

Dans la figure 2, le contexte réduit est complété avec les quatre relations $\uparrow$, $\downarrow$ et $\circ$ dans les cases vides qui correspondent toutes aux cas où $j \not\leq m$.

Par exemple avec $j = 5$ et $m = f$ deux noeuds respectivement sup-irréductible et inf-irréductible (voir figure 2), on a $j^- = 2$, $m^+ = c$ et $5 \uparrow f$ puisque $5 \not\leq f$, $5 \leq c$ et $2 \leq f$.

2.2.3 Sous-contexte flèche-fermé

Un sous contexte $(J, M, R \cap J \times M)$ d'un contexte (O, A, R) est un *sous-contexte flèche-fermé* s'il vérifie les conditions suivantes :

- Si $j \uparrow m$ et $j \in J$ alors $m \in M$
- Si $j \downarrow m$ et $m \in M$ alors $j \in J$

Ainsi, le premier sous-contexte de la figure 3 est flèche-fermé du contexte réduit de la figure 2 alors que le second ne l'est pas, puisque la relation $6 \downarrow g$ existe et g fait partie des attributs sans que $6 \in \{3, 5\}$.

2.2.4 Théorème d'équivalence

Introduisons la première équivalence dont nous avons besoin et dont la preuve se trouve dans (Ganter & Wille, 1999) :

Théorème 1

Soit $(J, M, J \times M \cap R)$ un sous-contexte de (O, A, R) . Sont équivalentes :

- Le sous-contexte $(J, M, J \times M \cap R)$ est compatible.
- Le sous-contexte $(J, M, J \times M \cap R)$ est flèche-fermé.

	c	d	f	g
3		x		x
5	x	x		
6	x		x	

	c	d	f	g
3		x		x
5	x	x		

Figure 3: Deux sous-contextes du contexte de la Figure 2. Le premier est flèche-fermé, le second ne l'est pas.

2.3 Relations de congruence et treillis quotients

Dans cette section, nous introduisons l'équivalence entre les relations de congruence et les sous-contextes flèche-fermés.

2.3.1 Quotient

Rappelons qu'une *relation d'équivalence* est une relation binaire R sur un ensemble E qui est réflexive, symétrique et transitive. La classe d'équivalence de $x \in E$ est $x_R = \{y \in E, xRy\}$.

L'ensemble des classes d'équivalence est appelé *ensemble quotient*, noté $E/R = \{x_R, x \in E\}$

2.3.2 Treillis quotient

Une relation de congruence Θ sur un treillis L est une relation d'équivalence telle que :

$$x_1\Theta y_1 \text{ et } x_2\Theta y_2 \implies x_1 \wedge x_2\Theta y_1 \wedge y_2 \text{ et } x_1 \vee x_2\Theta y_1 \vee y_2$$

La relation d'ordre suivante, définie sur le quotient L/Θ , forme un treillis appelé treillis quotient par Θ .

$$x_\Theta \leq y_\Theta \iff x\Theta(x \wedge y) \iff (x \vee y)\Theta y$$

Un théorème tout à fait standard de l'algèbre, dont la preuve est omise, affirme que :

Théorème 2

La projection $L \rightarrow L/\Theta$ est un morphisme de treillis surjectif.

La figure 4 montre le treillis quotient de la relation de congruence représentée par ses classes d'équivalences sur le treillis de l'exemple.

2.3.3 Le second théorème d'équivalence

Nous avons désormais tous les éléments permettant de formuler la seconde équivalence dont la preuve peut être trouvée dans (Ganter & Wille, 1999) :

Théorème 3

Etant donné un treillis L , l'ensemble des relations de congruence dans L est en bijection avec l'ensemble des sous-contextes flèche-fermés du contexte réduit de L .

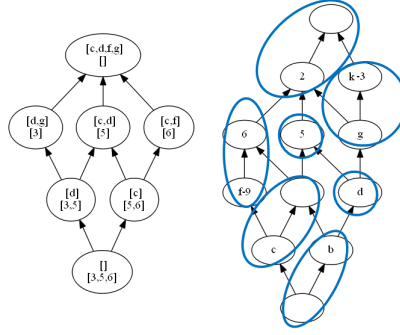


Figure 4: Un treillis quotient et les classes d'équivalence de sa relation de congruence.

2.4 Décompositions sous-directe

Dans cette section, nous introduisons l'équivalence entre les décompositions sous-directes et certaines familles de sous-contextes flèche-fermés.

2.4.1 Subdirect product

Définition 1

Un treillis sous-produit direct est un sous-treillis d'un treillis produit-direct $L_1 \times \dots \times L_n$ tel que les projections sur chacun des facteurs soient surjectives. Les treillis $L_i, i \in \{1, \dots, n\}$ sont des treillis facteurs. Une décomposition sous-directe d'un treillis L est la donnée d'un isomorphisme entre L et un treillis sous-produit direct, que l'on peut noter :

$$L \hookrightarrow L_1 \times \dots \times L_n \twoheadrightarrow L_i$$

2.4.2 Troisième équivalence

La troisième et la plus importante des équivalences, dont la preuve se trouve dans (Ganter & Wille, 1999), fait un lien avec les familles couvrantes de sous-contextes flèche-fermés.

Proposition 1

Etant donné un contexte réduit (J, M, R) , alors les décompositions sous-directes de son treillis de concepts L sont en bijection avec les familles de sous-contextes flèche-fermés $(J_j, M_j, J_j \times M_j \cap R)$ qui couvrent J et M , i.e. tels que $J = \cup J_j$ et $M = \cup M_j$.

3 Notre contribution

3.1 Résultat principal

A partir des équivalences précédents présentes dans (Ganter & Wille, 1999), on peut déduire le corollaire suivant :

Corollaire 1

Etant donné un treillis L et son contexte réduit (J, M, R) , sont en bijection :

1. Les familles de sous-contextes flèche-fermés de (J, M, R) couvrant J et M ,
2. Les familles de sous-contextes compatibles de (J, M, R) couvrant J et M ,
3. Les familles $(\theta_i)_{i \in I}$ de relations de congruences de L telles que $\bigcap_{i \in I} \theta_i = \Delta$ où $x \Delta y \iff x = y$.
4. L'ensemble des décompositions sous-directes de L et leurs treillis facteurs.

Dans ce qui suit, nous décrivons la construction d'une décomposition sous-directe particulière.

3.2 Calcul des facteurs irréductibles

Dans cette section, nous considérons les décompositions sous-directes d'un treillis L avec en entrée son contexte réduit (O, A, R) . Avec le corollaire 1, une décomposition sous-directe d'un treillis L peut être obtenue en calculant un ensemble de sous-contextes flèche-fermés de (O, A, R) qui couvrent O et A . Il y a évidemment plusieurs tels ensembles et donc plusieurs décompositions sous-directes. En particulier, la décomposition d'un treillis L en L lui-même, qui correspond à prendre un seul sous-contexte flèche-fermé : le contexte (O, A, R) en entier. Un algorithme de décomposition sous-directe a déjà été proposé (Funk *et al.*, 1995). Cependant, toutes les relations de congruence sont calculées et ensuite seulement des paires couvrantes de relations sont considérées. En conséquence, plusieurs décompositions peuvent être obtenues, et ces décompositions possèdent nécessairement seulement deux facteurs.

Dans cet article, nous nous concentrons sur une décomposition sous-directe d'un contexte en un nombre éventuellement grand de facteurs de taille plus petite. Ces derniers étant irréductibles au sens suivant. Un treillis L est *irréductible* lorsqu'il apparaît comme facteur de toute ses décompositions sous-directes. Une caractérisation des décompositions sous-directes en facteurs irréductibles se trouve dans (Ganter & Wille, 1999) :

Proposition 2

Un treillis L est irréductible si et seulement si son contexte réduit est monogène.

Un contexte (O, A, R) est dit *monogène* lorsqu'il peut être obtenu par fermeture d'un contexte contenant un seul $j \in A$. Ainsi (O, A, R) est le plus petit contexte flèche-fermé contenant j .

Nous pouvons donc déduire le résultat suivant :

Proposition 3

Soit L un treillis. On peut déduire de L un treillis produit direct $L_1 \times \dots \times L_n$ tel que chaque treillis L_i est :

- le treillis de concept d'un sous-contexte monogène;
- irréductible et;

- un treillis facteur d'une décomposition sous-directe.

Ce résultat peut être mis en oeuvre avec l'algorithme 1, polynomial en temps, qui permet de trouver les contextes des facteurs $L_1, \dots, L_n$ d'une décomposition sous-directe, avec un contexte (O, A, R) en entrée. En supposant le treillis construit et si le nombre n_J de sup-irréductibles est plus grand que le nombre n_M d'inf-irréductibles, alors la complexité est en $\mathcal{O}(n_J n_M)$. Les sous-contextes monogènes sont obtenus par fermeture de chaque $j \in J$, via l'algorithme 2. La décomposition sous-directe de L est alors obtenue en formant les treillis de concepts de ces sous-contextes.

On peut remarquer que les fermetures sont calculées sur les sup-irréductibles, mais cela aurait pu être fait sur les inf-irréductibles.

Algorithme 1 : Décomposition_SousDirecte

Entrées : Un contexte (O, A, R)

Sorties : Liste $\mathcal{L}$ des sous-contextes (J_j, M_j, R_j) des facteurs irréductibles.

```

1  $\mathcal{L} \leftarrow \emptyset$ ;
2 pour tous les  $j \in J$  faire
3   Calculer  $(J_j, M_j, R_j) = \text{Flèche\_Fermeture}((j, \emptyset, \emptyset), (O, A, R))$ , sous-contexte
   monogène engendré par  $j$ ;
4   si  $\mathcal{L}$  ne contient pas de sous-contexte couvrant  $(J_j, M_j, R_j)$  alors
5     ajouter  $(J_j, M_j, R_j)$  à  $\mathcal{L}$ 
6   si  $\mathcal{L}$  contient un sous-contexte  $(J, M, R)$  couvert par  $(J_j, M_j, R_j)$  alors
7     effacer  $(J, M, R)$  de  $\mathcal{L}$ 
8   retourner  $\mathcal{L}$ ;
```

Algorithme 2 : Flèche_Fermeture

Entrées : Un sous-contexte $(\tilde{J}, \tilde{M}, \tilde{R})$ d'un contexte (J, M, R)

Sorties : La flèche-fermeture de $(\tilde{J}, \tilde{M}, \tilde{R})$

```

1  $J_j = \tilde{J}; M_j = \tilde{M}$ ;
2  $pred_J = 0; pred_M = 0$ ;
3 tant que  $pred_M < \text{card}(M_j)$  ou  $pred_J < \text{card}(J_j)$  faire
4    $pred_J = \text{card}(J_j)$ ;
5    $pred_M = \text{card}(M_j)$ ;
6   pour tous les  $s \in J_j$  faire
7     ajouter à  $M_j$  tous les  $m \in M$  tels que  $s \uparrow m$ ;
8   forall the  $m \in M_j$  do
9     ajouter à  $J_j$  tous les  $s \in J$  tels que  $s \downarrow m$ ;
10  Retourner  $(J_j, M_j, R \cap J_j \times M_j)$ 
```

Considérons le contexte réduit de la Figure 2. Chaque itération de l'algorithme 1 est décrite dans la Figure 5 : pour chaque valeur de j , l'entrée et la sortie de l'algorithme 2 sont données ainsi que les sous-contextes monogènes qui appartiennent à $\mathcal{L}$ à la fin du processus. Ainsi nous obtenons trois treillis facteurs (voir Figure 6).

j	Flèche_Fermeture			$\mathcal{L}$
	Entrée $(\tilde{J}, \tilde{M}, \tilde{R})$	Sortie		
		J_j	M_j	
2	$(2, \emptyset, \emptyset)$	$\{2\}$	$\{k\}$	$\times$
3	$(3, \emptyset, \emptyset)$	$\{3, 5, 6\}$	$\{c, d, f, g\}$	$\times$
5	$(5, \emptyset, \emptyset)$	$\{5, 6\}$	$\{d, f, g\}$	
6	$(6, \emptyset, \emptyset)$	$\{6\}$	$\{d\}$	
9	$(9, \emptyset, \emptyset)$	$\{9\}$	$\{b\}$	$\times$

Figure 5: Itérations de l'algorithme 1 pour le contexte réduit de la Figure 2

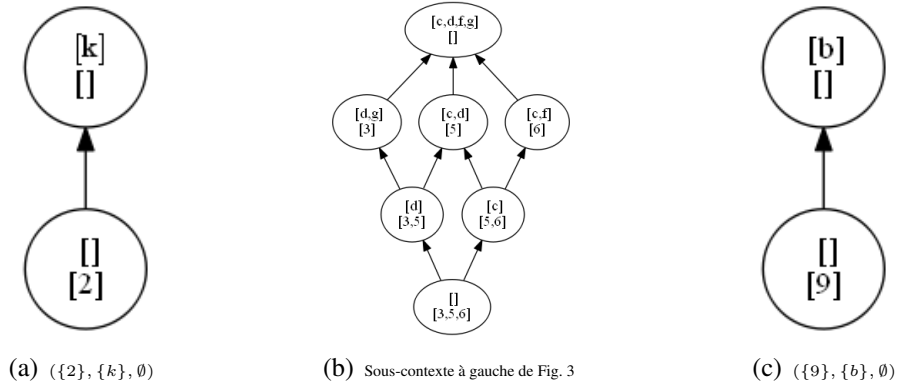


Figure 6: Les trois treillis facteurs de la décomposition, avec leur sous-contexte en légende

3.3 Morphisme injectif et FCA

La décomposition sous-directe d'un treillis L ayant pour facteurs $L_1, \dots, L_n$ est pertinente car il existe un morphisme injectif de L dans le produit direct $L_1 \times \dots \times L_n$. Ce morphisme est précisé par la bijection entre les sous-contextes compatibles et les relations de congruences donnée dans le corollaire 1 :

Proposition 4

Soit $(J, M, R \cap J \times M)$ un sous-contexte compatible, alors la relation $\Theta_{J,M}$ définie par :

$$(A_1, B_1)\Theta_{J,M}(A_2, B_2) \iff A_1 \cap J = A_2 \cap J \iff B_1 \cap M = B_2 \cap M$$

est une relation de congruence, et son treillis quotient est isomorphe au treillis de concepts du sous-contexte $(J, M, R \cap J \times M)$.

Ce morphisme se calcule simplement en parcourant les noeuds du treillis initial, en les transformant en noeuds du treillis produit et en marquant ces derniers. On obtient le marquage du volumineux treillis produit, illustré par la figure 7. Evidemment, cet algorithme n'a pas vocation à être utilisé pour des applications réelles utilisant de grands contextes puisque le treillis produit est beaucoup plus gros que le treillis original et l'un des objectifs principaux de la décomposition est de travailler avec des treillis plus petits. Cet algorithme est uniquement utile

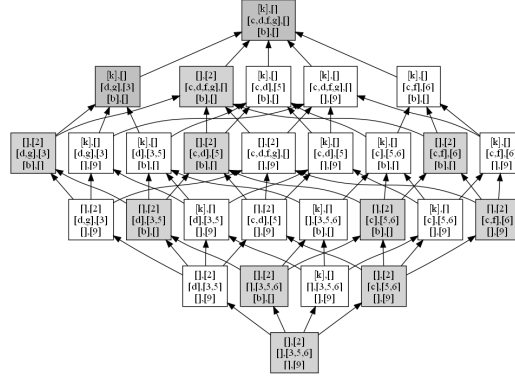


Figure 7: L'horrible treillis produit marqué

à des fins de tests ou d'illustrations. Cependant, il peut être étendu pour un usage élémentaire en FCA. Une fois que la décomposition sous-directe d'un contexte réduit (O, A, R) en sous-contextes irréductibles $C_1, \dots, C_n$ a été obtenue, une exploration interactive et un processus de fouille peuvent facilement être envisagés, en utilisant des traitements simples et en évitant la génération du treillis issu de contexte global (O, A, R) .

4 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons présenté un algorithme polynomial de décomposition d'un contexte réduit en sous-contextes tels que leurs treillis de concepts soient irréductibles. Cette décomposition est la conséquence directe des liens très forts, établis dans (Ganter & Wille, 1999), qui existent entre les facteurs de la décomposition, les relations de congruence, les sous-contextes flèche-fermés, et les sous-contextes compatibles.

Pour approfondir cette décomposition sous-directe, il serait intéressant de mener des expériences à plus grande échelle sur des données réelles. afin de mieux comprendre la sémantique cachée derrière les sous-contextes irréductibles. En particulier, les attributs qui interviennent dans plusieurs facteurs, autrement dit dans plusieurs vues sur les données, doivent avoir une sémantique forte qu'il est certainement important de comprendre. Il serait également utile de proposer à l'utilisateur de choisir de manière interactive quelques facteurs de la décomposition et de mixer cette approche avec celle de (Funk *et al.*, 1995).

D'un point de vue théorique, nous pensons qu'il y a des liens forts entre les bases d'implications des treillis quotients et du treillis initial. A notre connaissance, cette problématique n'a jamais été étudiée et pourrait avoir des conséquences significatives d'un point de vue algorithmique. Ce problème a cependant été abordé par (Valtchev & Duquenne, 2008) dans le cadre d'une décomposition verticale d'un contexte en sous-contextes.

Comme l'étude empirique de (Snelting, 2005) montre que de nombreux contextes issus de la vie réelle sont irréductibles, nous espérons pouvoir (i) identifier les cas de contextes nécessairement irréductibles, (ii) étudier, comparer, combiner avec d'autres décompositions, par exemple en utilisant la congruence de Fratini (Duquenne, 2010), ou l'opération de doublement de convexes (Day, 1994; Nation, 1995; Geyer, 1994; Bertet & Caspard, 2002). Enfin, la construction

du treillis à partir de ses quotients pourrait être obtenue en utilisant les principes d'optimisation utilisés dans l'opération relationnelle de jointure.

References

- M. BARBUT & B. MONJARDET, Eds. (1970). *L'ordre et la classification*. Algèbre et combinatoire, tome II. Hachette.
- BERTET K. & CASPARD N. (2002). *Doubling convec sets in lattices: characterizations and recognition algorithms*. Rapport interne TR-LACL-2002-08, LACL (Laboratory of Algorithms, Complexity and Logic), University of Paris-Est (Paris 12).
- CRAWLEY P. & DILWORTH R. (1973). *Algebraic theory of lattices*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- DAY A. (1994). Congruence normality: The characterization of the doubling class of convex sets. *algebra universalis*, **31**(3), 397–406.
- DEMEL J. (1982). Fast algorithms for finding a subdirect decomposition and interesting congruences of finite algebras. *Kybernetika (Prague)*, **18**(2), 121–130.
- DUQUENNE V. (2010). Lattice drawings and morphisms. In *Formal Concept Analysis, 8th International Conference, ICFCA 2010, Agadir, Morocco, March 15-18, 2010. Proceedings*, p. 88–103.
- FERRÉ S. (2014). *Reconciling Expressivity and Usability in Information Access from File Systems to the Semantic Web*. PhD thesis, Univeristy Rennes 1.
- FREESE R. (2008). Computing congruences efficiently. *Algebra universalis*, **59**(3-4), 337–343.
- FUNK P., LEWIEN A. & SNELTING G. (1995). *Algorithms for concept lattice decomposition and their applications*. Rapport interne, TU Braunschweig.
- GANTER B. & WILLE R. (1999). *Formal concept analysis - mathematical foundations*. Springer.
- GEYER W. (1994). The generalized doubling construction and formal concept analysis. *algebra universalis*, **32**(3), 341–367.
- GRÄTZER G. (1978). *General lattice theory*. Basel: Birkhäuser-Verlag.
- MIHÓK P. & SEMANIŠIN G. (2008). Unique factorization theorem and formal concept analysis. In S. YAHIA, E. NGUIFO & R. BELOHLAVEK, Eds., *Concept Lattices and Their Applications*, volume 4923 of *Lecture Notes in Computer Science*, p. 232–239. Springer Berlin Heidelberg.
- NATION J. (1995). Alan day's doubling construction. *algebra universalis*, **34**(1), 24–34.
- SNELTING G. (2005). Concept lattices in software analysis. In *Formal Concept Analysis, Foundations and Applications*, p. 272–287.
- VALTCHEV P. & DUQUENNE V. (2008). On the merge of factor canonical bases. In *International Conference on Formal Concept Analysis ICFCA*, p. 182–198. Springer Berlin Heidelberg.
- VISANI M., BERTET K. & OGIER J.-M. (2011). Navigala: an Original Symbol Classifier Based on Navigation through a Galois Lattice. *International Journal on Pattern Recognition and Artificial Intelligence (IJPRAI)*.
- WILLE R. (1969). Subdirekte produkte und konjunkte summen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **0239_0240**, 333–338.
- WILLE R. (1976). Subdirekte Produkte vollständiger Verbände. *J. reine angew. Math.*, **283/284**, 53–70.
- WILLE R. (1983). Subdirect decomposition of concept lattices. *Algebra Universalis*, **17**, 275–287.
- WILLE R. (1987). Subdirect product construction of concept lattices. *Discrete Mathematics*, **63**(2-3), 305–313.