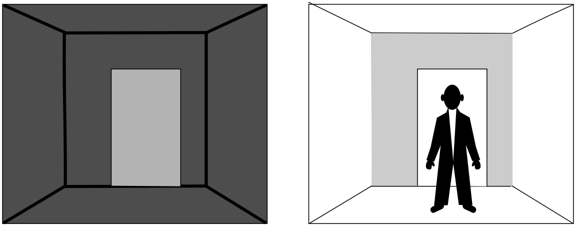
Raisonnement qualitatif sur l'espace et le temps : un tour d'horizon

Gérard Ligozat

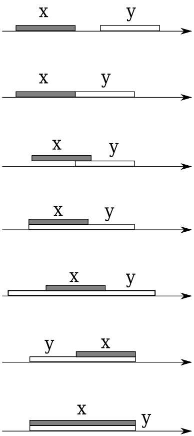
La Rochelle, 7 juin 2012

Le formalisme d'Allen (1983)



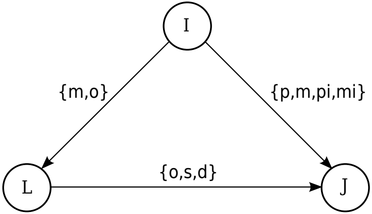
- Lorsque j'ai actionné l'interrupteur pour allumer la lumière, Jean n'était pas dans la pièce ;
- mais il y était lorsque la lumière s'est éteinte.

Les relations d'Allen



x p y	x *precedes* y
y pi x	y *is preceded by* x
x m y	x *meets* y
y mi x	y *is met by* x
x o y	x *overlaps* y
y oi x	y *is overlapped by* x
x s y	x *starts* y
y si x	y *is started by* x
x d y	x *during* y
y di x	y *contains* x
x f y	x *finishes* y
y fi x	y *is finished by* x
x eq y	x *equals* y

Réseaux de contraintes



- Trois sommets :
  - I = interrupteur,
  - L =lumière,
  - J = Jean présent ;
- Arcs étiquetés par des disjonctions (notées comme des ensembles) des relations de base ;

Innovations

Le formalisme d'Allen introduit un certain nombre de nouveautés :

- on considère uniquement des **intervalles**, et non des instants;
- les relations possèdent la propriété JEPD (**schémas de partition**);
- disjonctions pour l'information incomplète;
- propagation de contraintes (Waltz);
- algorithmes dérivés des CSP.

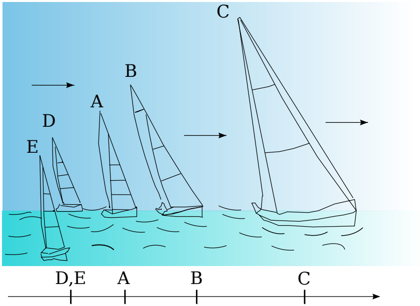
On a donc :

- un **langage**;
- un mécanisme de **raisonnement**;
- des **algorithmes** de mise en œuvre.

Le calcul des instants

- l'accent mis sur les intervalles a occulté le fait que certaines caractéristiques du calcul d'Allen sont déjà présentes dans le **calcul des instants**.

Une régate : reportage



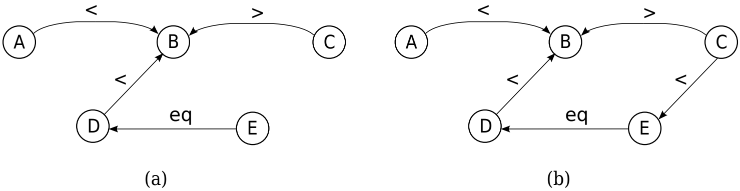
Premier reporter :

1. A se trouve derrière B ;
2. C est devant B ;
3. D est derrière B ;
4. E est au même niveau que D.

Second reporter :

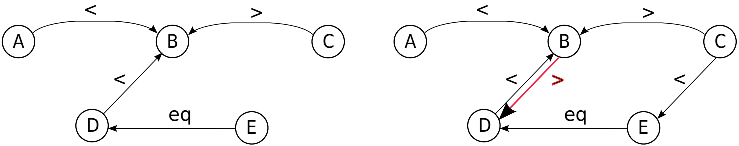
5. C est derrière E.

Régate : représenter



En (a), déclarations du premier reporter ; en (b), on a rajouté celle du second.

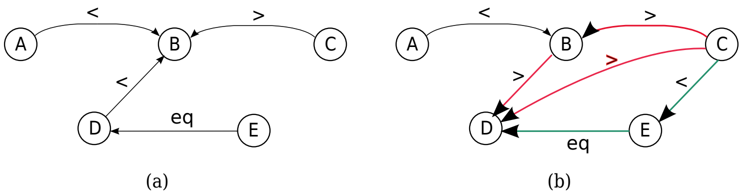
Régate : raisonner



(a) (b)

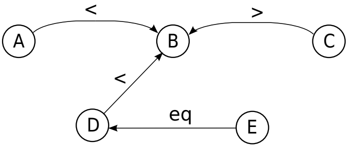
On peut utiliser l'opération d'**inversion**, qui échange $<$ et $>$

Régate : raisonner

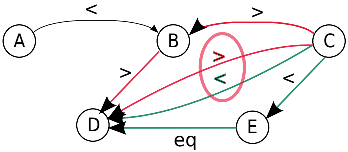


. . . et celle de **composition**, qui permet de conclure que C > D.

Régate : raisonner



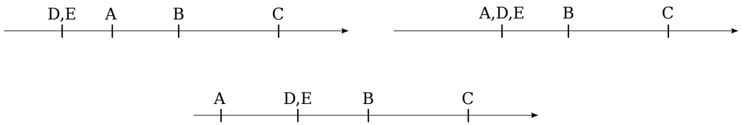
(a)



(b)

...et celle de **composition**, qui permet de conclure que C > D.
Mais la composition de < avec eq montre que C < D :
contradiction !
Le réseau (b) n'est pas cohérent.

Régate : trois scénarios possibles



- Si on oublie le deuxième informateur, le réseau correspondant (a) est cette fois cohérent :
- il correspond à trois **scénarios** qualitatifs distincts (le premier d'entre eux est la situation observée)

Une régate : bilan

- Le domaine considéré : la droite réelle $\mathbb{R}$;
- partitionnement de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en trois relations binaires (JEPD) désignées par les symboles $<$, eq, et $>$;
- deux opérations, l'**inversion** et la **composition**, permettent de propager les contraintes ;
- le résultat de la composition peut être une disjonction : de X $<$ Y et Y $>$ Z, on ne peut déduire que X $\{<, \mathrm{eq}, >\}$ Z ;

Retour au formalisme d'Allen

- la structure obtenue sur les huit relations disjonctives entre instants est une **algèbre relationnelle** appelée **algèbre des instants**.
- de manière analogue, munies de l'inverse et de la composition, les 13 relations de base engendrent une algèbre relationnelle, l'**algèbre d'Allen**, contenant 8192 éléments ;
- inverse et composition opèrent sur les relations disjonctives ;
- la propagation des contraintes utilise ces deux opérations.

Clôture algébrique

Principe de la **clôture algébrique** :

- Pour tout triangle (i, j, k) du réseau de contraintes, la contrainte $C(i,j)$ sur l'arc (i,j) doit être compatible avec la composition de $C(i,k)$ avec $C(k,j)$;
- on peut donc itérer l'opération

$$C(i,j) \leftarrow C(i,j) \cap (C(i,k) \circ C(k,j))$$

sans changer le problème.

Complexité du formalisme d'Allen

Les problèmes de base :

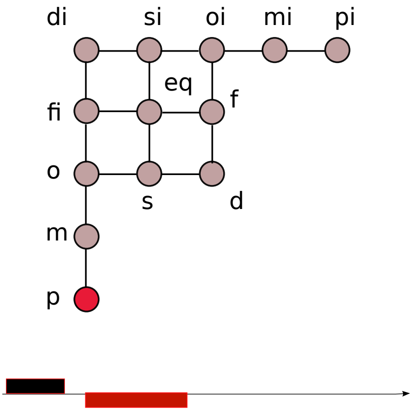
- **Cohérence** : un réseau donné est-il cohérent ?
- **Réseau minimal** : déterminer le réseau minimal équivalent à un réseau donné ;
- **Solutions** : déterminer une solution / toutes les solutions s'il en existe.

- Du point de vue de la complexité, équivalence polynomiale ;
- la propriété de **clôture algébrique** est une condition nécessaire de cohérence ;
- lorsque le problème est polynomial, est-elle suffisante ?

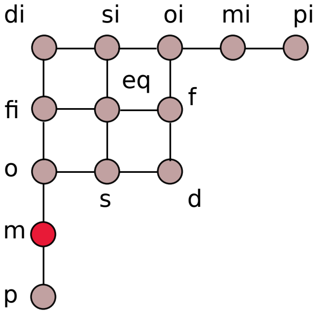
Complexité du formalisme d'Allen

- pour les relations disjonctives arbitraires ($2^{13} = 8192$ relations), le problème de **cohérence** d'un réseau est NP-complet;
- polynomial si toutes les relations sont équivalentes à une conjunction de relations sur les extrémités des intervalles (relations dites **ponctualisables**);
- en particulier, vrai pour les **relations convexes** (83 relations) qui sont équivalentes à des contraintes sur les extrémités n'utilisant pas la relation $\neq$.

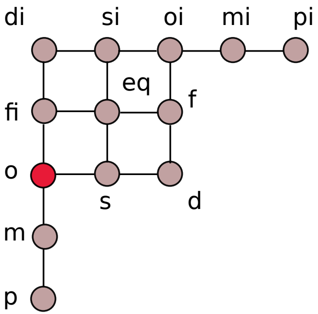
Le treillis des relations de base d'Allen



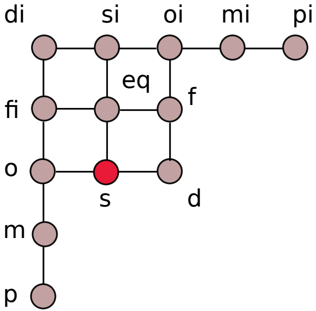
Le treillis des relations de base d'Allen



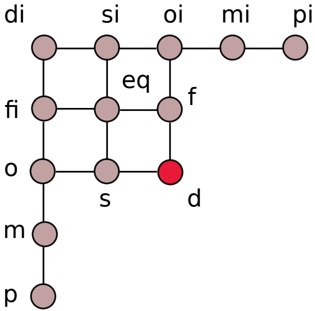
Le treillis des relations de base d'Allen

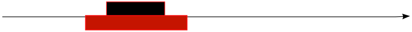


Le treillis des relations de base d'Allen

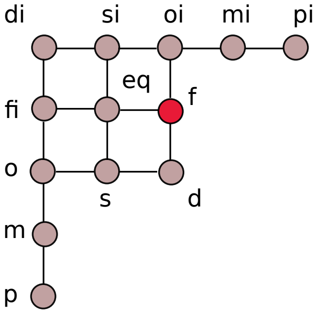


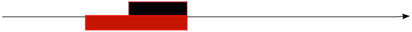
Le treillis des relations de base d'Allen



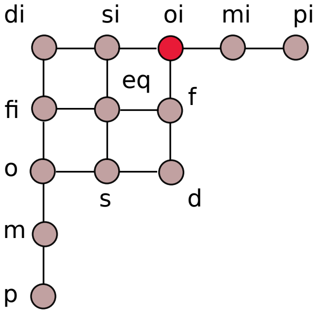


Le treillis des relations de base d'Allen

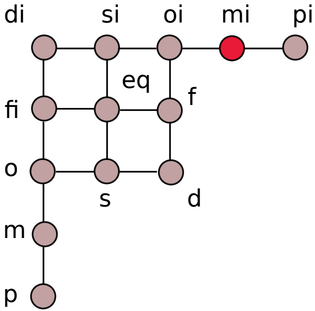




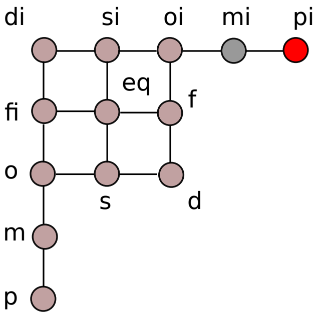
Le treillis des relations de base d'Allen



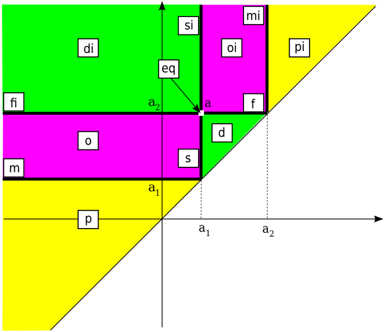
Le treillis des relations de base d'Allen

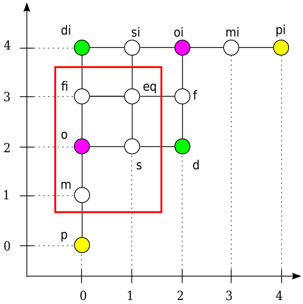


Le treillis des relations de base d'Allen



Les relations comme régions du plan

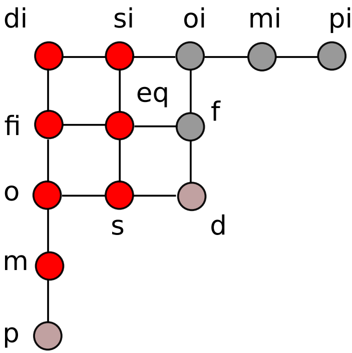




{m, o, s, fi, eq} = [m, eq] est une relation convexe
{m, o, s, fi, eq} = [m, eq] - {eq} est une relation pré-convexe

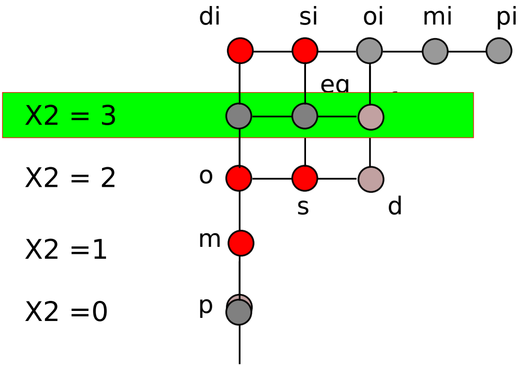
Relations convexes

- Les relations convexes sont les **intervalles** du treillis ;



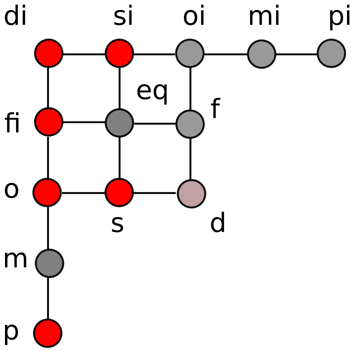
Relations ponctualisables

- les relations ponctualisables sont les **coupes impaires** des relations convexes ;



Relations pré-convexes

- Les relations **pré-convexes** sont celles que l'on peut compléter par des relations de dimension 0 ou 1 pour obtenir des relations convexes.



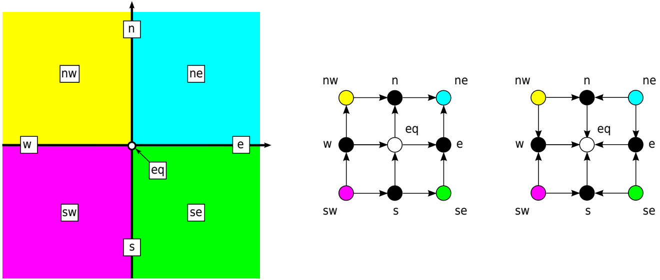
Résultats de complexité

- La sous-classe des **relations pré-convexes**, ou **relations de ORD-Horn**, constitue l'unique sous-classe polynomiale maximale contenant toutes les relations de base.
- Pour les réseaux pré-convexes, le **problème de cohérence** peut être résolu en employant la méthode de clôture algébrique.
- La clôture algébrique peut être calculée en temps $O(n^3)$, où n est le nombre de sommets du réseau.

Une galerie de formalismes . . .

Calcul des relations cardinales

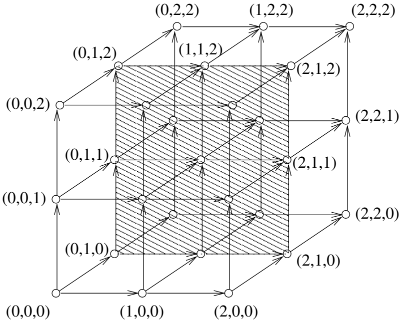
- C'est une version 2D du calcul des instants



(a) (b) (c)

Calcul des 3-points

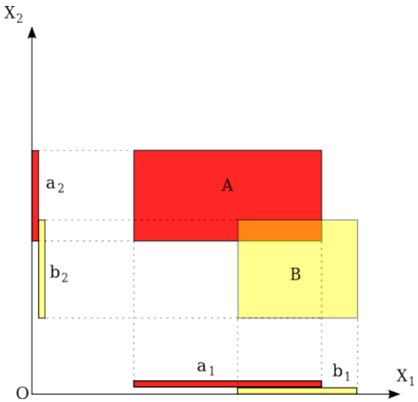
- C'est une version 3D du calcul des instants



Le treillis des relations entre 3-points

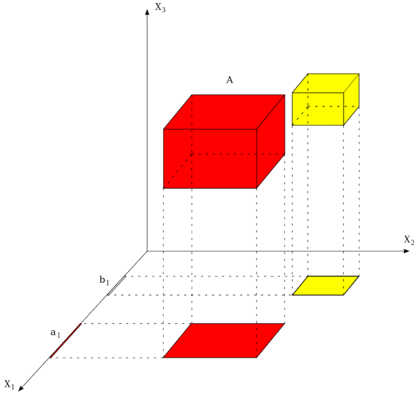
Le calcul des rectangles

- C'est une version 2D du calcul d'Allen



Le calcul des 3-pavés

- C'est une version 3D du calcul d'Allen



Intervalles généralisés

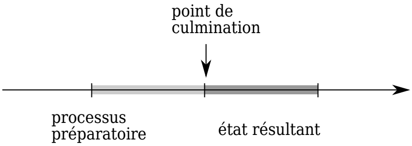
Moens et Steedmann (1988):

« *Quand on a construit le pont,*

1. *c'est un architecte de la région qui en a réalisé la conception ;*
2. *on a utilisé des matériaux de première qualité ;*
3. *on a supprimé ainsi la plupart des embouteillages dans la ville.* »

Nucleus

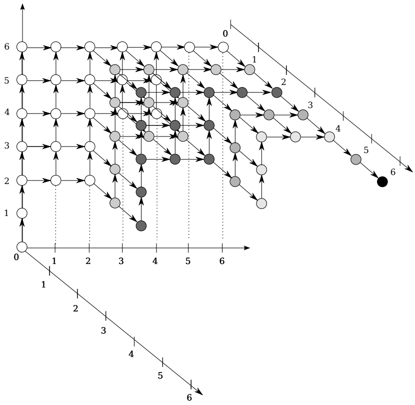
- un **nucleus** occupe deux intervalles de temps contigus : un *processus préparatoire*, qui se termine sur un *point de culmination*, suivi à son tour d'un *état résultant*;
- un même événement peut être conceptualisé de manières différentes, comme le montre l'exemple du pont ;
- en conséquence, les entités temporelles de base possèdent **trois**, et non deux, points significatifs ;



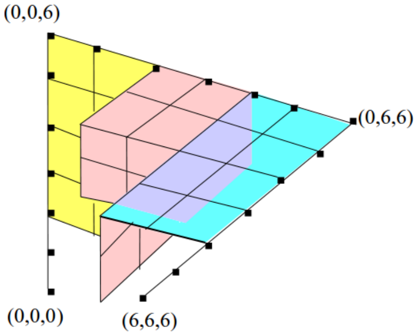
Intervalles généralisés

- Un nucleus est représenté par une suite ordonnée de trois points ou **3-intervalle** ;
- les relations de base entre 3-intervalles ont une structure de treillis ;
- de manière générale, on peut considérer les relations de base, ou **(p,q)-relations**, entre **p-intervalles** et **q-intervalles** ;
- les intervalles au sens d'Allen sont les 2-intervalles.

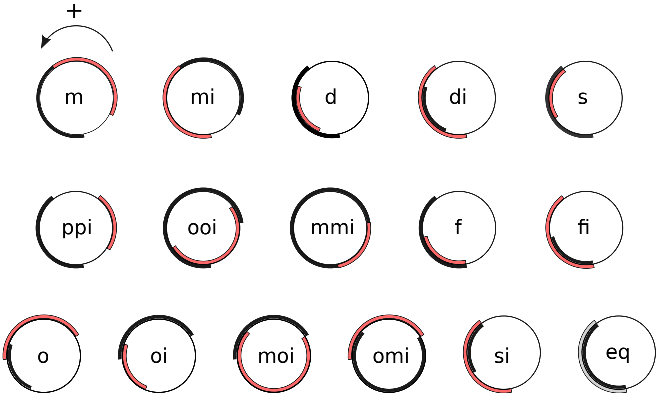
Le treillis des (3,3)-relations



Le treillis des (3,3)-relations (résumé)

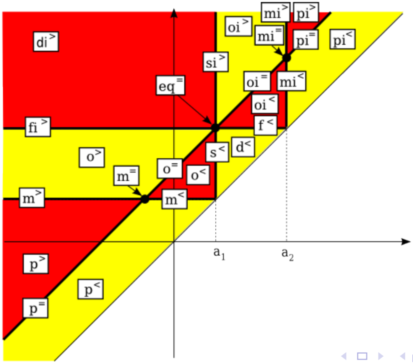


Intervalles circulaires



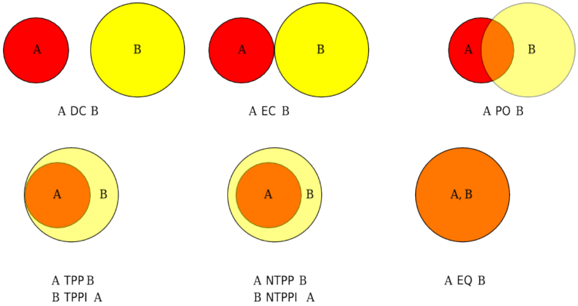
Le formalisme INDU

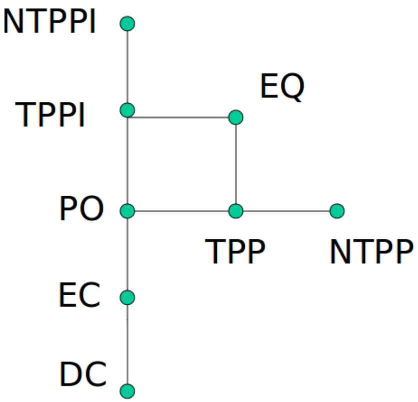
- Un raffinement du calcul d'Allen (durées relatives prises en compte).
- il possède des propriétés intéressantes ;
- par exemple, son algèbre associée **n'est pas associative**.



Le calcul RCC-8

- Un formalisme qui représente des **relations topologiques** entre régions;
- il possède 8 relations de base (d'où son nom).

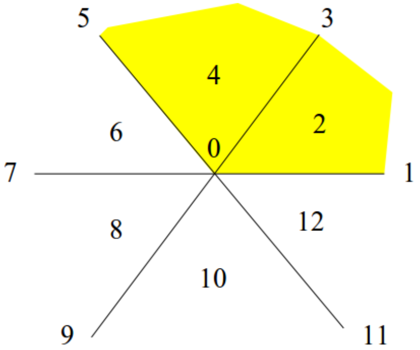



NTPPI
TPPI
EQ
PO
TPP
NTPP
EC
DC

Le calcul $2n$-étoile I

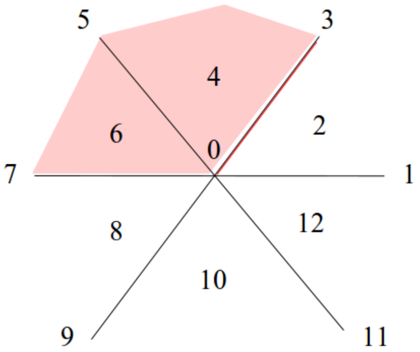
- Un formalisme qui représente **l'orientation** de manière plus fine que le calcul des relations cardinales;
- Entités : points dans le plan $\mathbb{R}^2$;
- Relations : orientations par rapport à des angles multiples de $2\pi/n$;
- En particulier, $n = 4$ donne le calcul des DC;
- On a $2n$ régions de dimension 1 ou 2.

Le calcul 2n-étoile II

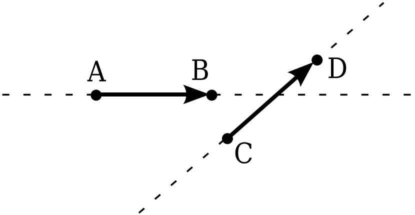


Le calcul 6-étoile

Composition de relations



Les calculs de dipôles

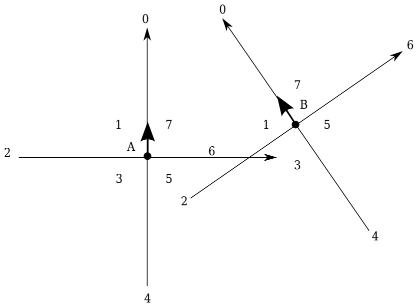


Par rapport à (A, B): C est à droite, D à gauche, d'où rl ; par rapport à (C, D), A et B sont à gauche, d'où ll ; la relation de (C, D) relativement à (A, B) est donc notée $rlll$.

Les calculs $\mathcal{OPRA}_m$ I

- Entités : points orientés dans le plan ;
- Pas de repère global, calcul relatif ;
- On utilise m droites pour $\mathcal{OPRA}_m$;
- On note la position de B par rapport à A, et celle de A par rapport à B.

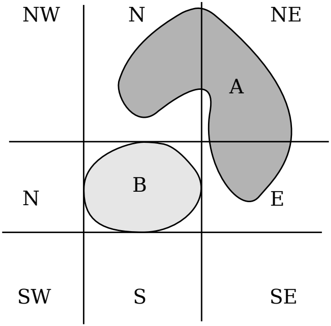
Les calculs $\mathcal{OPRA}$ II



$$A\ {}_{2}\angle^{1}_{7}\ B$$

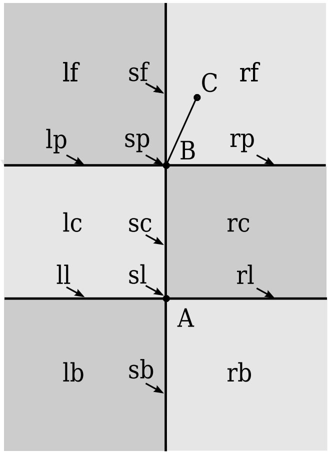
Ici $m = 2$; B se situe dans la zone 7 par rapport à A, et A dans la zone 1 par rapport à B

Relations cardinales entre régions

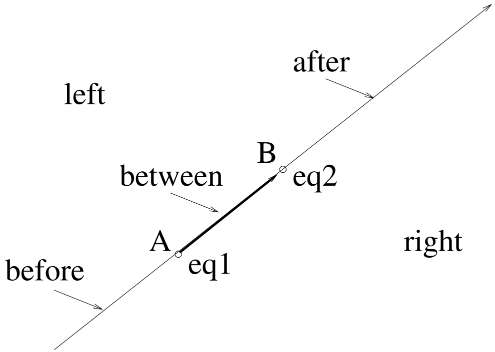


Par rapport à B, A est dans la relation $(N : NE : E)$

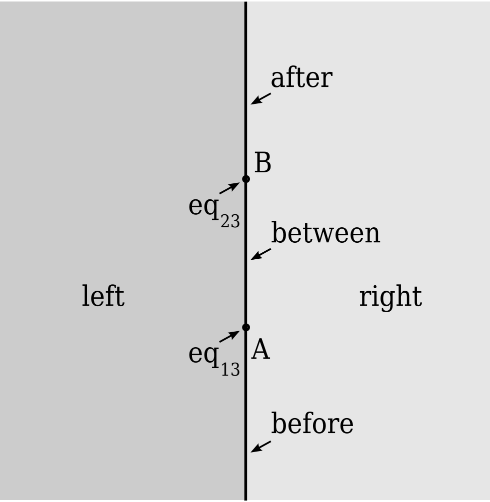
Le calcul de la Croix de Lorraine (double-cross calculus)



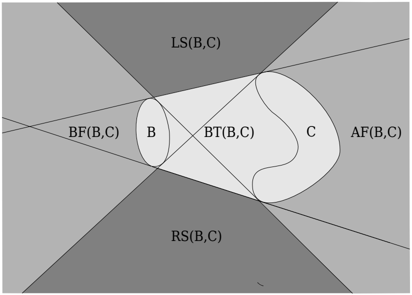
Le calcul va-et-vient (flip-flop calculus)



Le calcul va-et-vient complété ($\mathcal{LR}$ calculus)

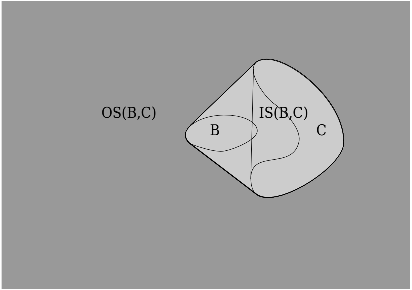


Le formalisme de 5-intersection I



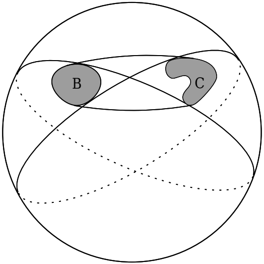
Les clôtures convexes de B et C sont disjointes

Le formalisme de 5-intersection

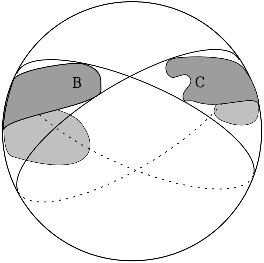


Les clôtures convexes de B et C ne sont pas disjointes

Sur la sphère



(a)



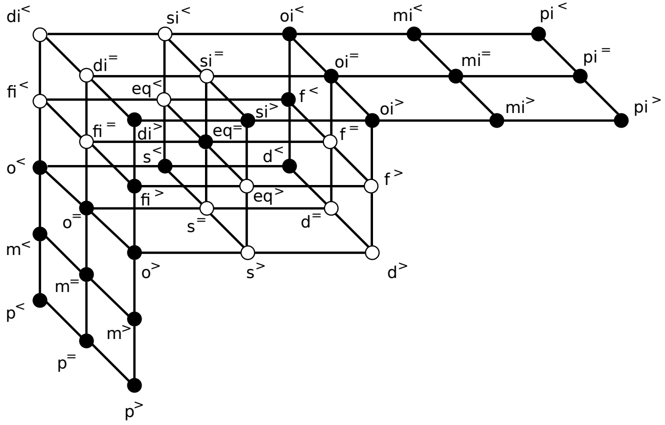
(b)

En (a) les régions sont contenues dans un même hémisphère ; ce n'est pas le cas en (b)

Complexité des formalismes

- Pour les intervalles généralisés, les *n*-points, *n*-pavés, une notion plus forte que celle de pré-convexité, celle de **pré-convexité forte**, garantit la polynomialité ;
- pour ces formalismes, les relations fortement pré-convexes coïncident avec les **relations de ORD-Horn** de Nebel et Bürckert ;
- il existe dans RCC-8 trois classes maximales polynomiales contenant toutes les relations de base (Renz) ;
- Jonsson *et al.* ont déterminé toutes sous-classes polynomiales de l'algèbre d'Allen et de RCC-8 ;

Le cas de INDU I



Le cas de INDU II

Résultats de complexité (Balbiani, Condotta, Ligozat) :

- dans l'algèbre INDU, les relations **fortement pré-convexes** $\mathcal{F}$ sont représentées par des clauses de Horn, donc de complexité polynomiale ;
- une autre sous-classe $\mathcal{G}$ est polynomiale, et son problème de cohérence peut être résolu par la méthode de clôture algébrique ;
- dans ce cas, méthode "géométrique" et méthode "syntaxique" donnent donc des résultats distincts.

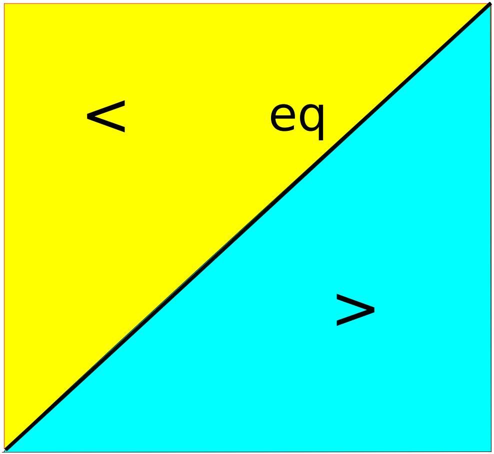
Bilan du RQTE

1. une **abondance** formalismes qualitatifs ;
2. recherche de **principes unificateurs**;
3. concernant le problème central de la **complexité** :
   - développement d'une **approche géométrique**;
   - en parallèle avec l'utilisation des **relations linéaires disjonctives** (DLR) ;
4. recherche de techniques **efficaces**.

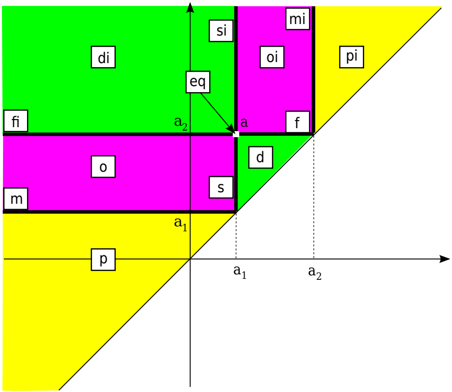
Retour sur le calcul des instants

- entités : **instants** (points de la droite réelle)
- relations de base : trois relations $R_<$, R_{eq}, $R_>$ qui constituent une **partition de** $\mathbb{R}^2$;
- d'où 8 relations disjonctives, dont la relation vide et la relation universelle ;
- une des relations est la relation diagonale ;
- l'opération d'inversion permute les trois relations de base.

La partition du plan associée au calcul des instants



(Une coupe de) la partition associée au calcul d'Allen



Schémas de partition

Etant donné un univers U d'entités (temporelles ou spatiales) :

Définition

Un **schéma de partition** sur U est la donnée d'une partition finie de $U \times U$, soit $R_0, \ldots, R_k$ telle que :

- l'une des R_i est la relation diagonale (identité) ;
- pour tout i, l'inverse de R_i est une relation R_j pour un certain j.

Composition faible

Étant donné un schéma de partition :

Définition

Par définition, la **composition faible** $(R_i \diamond R_j)$ de deux relations R_i et R_j est l'union de toutes les relations R_k telles que $(R_i \circ R_j)$ ait avec R_k une intersection non vide.

Exemple

- U est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
- les trois relations $<$, eq, $>$ définissent un schéma de partition sur $\mathbb{N}$;
- la composition $(< \circ <)$ est strictement contenue dans $<$ (elle ne contient pas les couples d'entiers $(n, n+1)$) ;
- donc par définition, $(< \diamond <)$ est la relation $<$.

Représentations faibles I

- Un schéma de partition définit une **algèbre non-associative** ;
- si la composition faible est associative, cette algèbre est une algèbre relationnelle ;
- l'application $i \mapsto R_i$ qui à tout élément de l'algèbre associe la relation binaire "concrète" $R_i \subseteq U \times U$ est une **représentation faible** de cette algèbre.

- **Intuition** : une représentation faible d'une algèbre **abstraite** est une réalisation concrète de cette algèbre en termes de "vraies" relations binaires, dans laquelle on se résigne à représenter la "vraie" composition par son approximation qui est la composition faible.

Représentations faibles II

Définition

Une *représentation faible* d'une algèbre non-associative $\mathbf{A}$ est la donnée d'un couple (U, φ), où :

- U est un ensemble non-vide ;
- φ est une application $\varphi : A \to \mathcal{P}(U \times U)$;
- φ est un morphisme d'algèbres de Boole ;
- $\varphi(1') = \Delta_U$;
- pour tout $x \in A$, $\varphi(x^{\smile}) = \varphi(x)^{-1}$;
- pour tous $x, y \in A$, $\varphi(x; y) \supseteq \varphi(x) \circ \varphi(y)$.

Représentations faibles III

Exemples :

- une représentation faible de l'algèbre des instants est un ordre total (éventuellement infini) ;
- une représentation faible (finie) de l'algèbre d'Allen peut être vue comme un réseau de contraintes **atomique** et **algébriquement clos** : si b est une relation de base, $\varphi(b)$ est l'ensemble des couples de sommets (i, j) étiquetés par b ;
- cela est général.

Définition

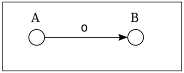
Un **formalisme qualitatif** est la donnée d'une algèbre non-associative $\mathbf{A}$ et d'une représentation faible (U, φ) de cette dernière (U est alors le **domaine d'interprétation** du formalisme).

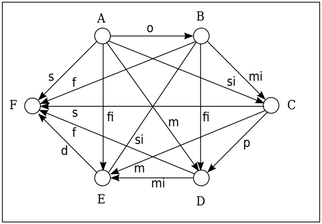
La catégorie des représentations faibles

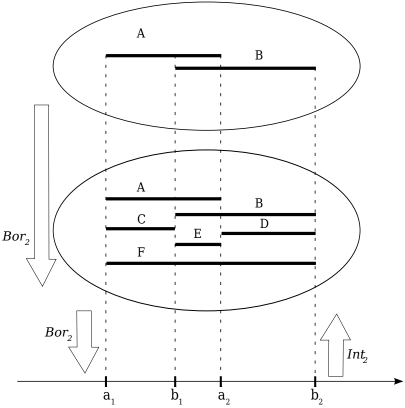
On peut considérer la **catégorie** des représentations faibles d'une algèbre donnée :

- un réseau de contraintes atomique algébriquement clos $\mathcal{N}$ s'identifie alors à une RF particulière ;
- ce réseau est cohérent ssi il existe un **morphisme** de $\mathcal{N}$ sur la RF qui définit le formalisme.

Des RF de l'Algèbre d'Allen à celles des instants







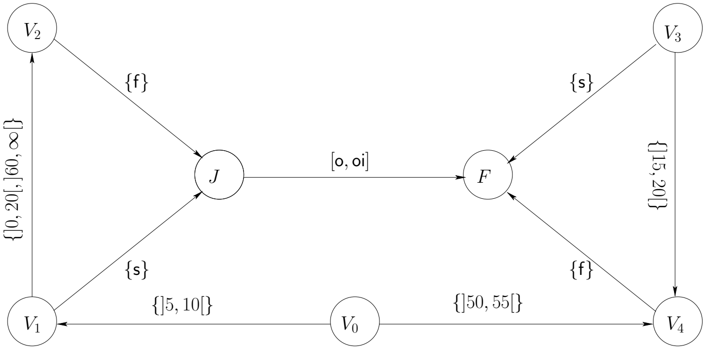
Approches complémentaires et alternatives

- **Formalismes hybrides**: intégration du raisonnement **qualitatif** et d'aspects **quantitatifs** ;
- RQTE **flou** :
  - relations floues entre entités "classiques";
  - intervalles flous ;
  - régions floues.
- Un **point de vue mathématique** : les problèmes de **satisfaction de contraintes** dans leurs relations avec les **polymorphismes** de structures relationnelles.
- Des outils logiciels pour le RQTE ;
- nouvelles techniques de solution par traduction (CSP finis, SAT).

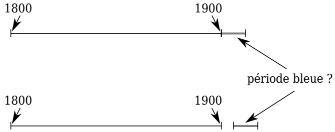
Formalismes hybrides

- Ils combinent relations qualitatives et quantitatives.
- Deux types d'approche :
  - Deux réseaux distincts, un pour les relations qualitatives, l'autre pour les relations quantitatives, et des mécanismes pour le transfert des contraintes entre les deux réseaux ;
  - un réseau unique qui représente les deux types de relations.

Un réseau hybride (Meiri)



Raisonnement flou



- La "Période bleue" chez Picasso se situe au début du vingtième siècle".
- on est amené à considérer des **intervalles flous** ;

Dans le cas de la "Période bleue", on dispose de connaissances sur les périodes de réalisation des tableaux suivants :

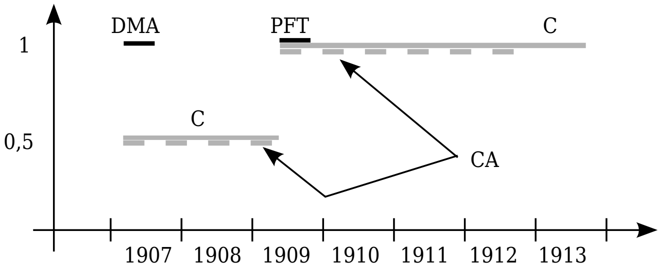
- Pain et fruit sur une table ;
- Les demoiselles d'Avignon ;

et sur la période de "cubisme analytique" et la "Période cubiste" de Picasso.

Approche de Schockaert *et al.*:

- les formules considérées sont du type $bb^{\ll}(A, B)$ (l'intervalle A commence avant l'intervalle B) ;
- les contraintes sont du type $bb^{\ll}(A, B) \geq \lambda$, où on cherche à rendre λ aussi proche de 1 que possible ;
- la résolution des contraintes consiste à déterminer un ensemble cohérent de paramètres qui soit optimal ;
- on ramène le problème à la résolution d'un système de contraintes linéaires disjonctives.

Une interprétation floue

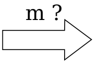


- DMA: Demoiselles d'Avignon
- PFT: Pain et fruits sur une table
- C: Cubisme
- CA: Cubisme analytique

CSP et structures relationnelles

- Un problème de sudoku est un CSP fini ;
- dans le RQET on a affaire à des CSP dont le domaine est infini (par exemple, les points de $\mathbb{R}$.

				9		6	1	
9	1		5		3			
5					4	8		3
	5	3				1	2	8
8	9	1				5	4	
4		5	8					7
			4		9		5	2
	7	9		5				



1	2	3	4	5	6	7	8	9

Structures relationnelles

La **structure relationnelle** $\mathcal{U}_{sudo} = (U_{sudo}, D, P_1, \ldots, P_9)$;

- Un ensemble $U_{sudo} = \{1, \ldots, 9\}$ (les 9 chiffres de 1 à 9) ;
- des (symboles de) relation(s) : $D, P_1, \ldots, P_9$;
- $D(x_1, \ldots, x_9)$ se lit “les chiffres $x_1, \ldots, x_9$ sont tous différents” (donc $\{x_1, \ldots, x_9\}$ est l'ensemble $\{1, \ldots, 9\}$) ;
- $P_i(x)$ se lit “x est le chiffre i”.

- La signature de $\mathcal{U}_{sudo}$ est $(D, P_1, \ldots, P_9)$, où D est un prédicat 9-aire, et les P_i sont unaires.

Structures relationnelles

La structure relationnelle associée à un problème de sudoku $\mathcal{U}_{grille} = (U_{grille}, D, P_1, \ldots, P_9)$:

- la signature est la même que celle de $\mathcal{U}_{sudo}$;
- U_{grille} est un ensemble de 81 cases organisées en 9 lignes, 9 colonnes, et 9 régions ;
- $D(x_1, \ldots, x_9)$ se lit "les cases $x_1, \ldots, x_9$ sont dans une même ligne, une même colonne, ou une même région" ;
- $P_i(x)$ se lit "la case x contient le chiffre i".

Structures relationnelles

- **Touver une solution** du problème de sudoku, c'est simplement **trouver un morphisme de structures relationnelles**

$$m : U_{grille} \rightarrow U_{sudo}$$

- c'est-à-dire pour chaque case x, un chiffre $m(x)$, de sorte que pour chaque symbole de prédicat ... !
- Travaux de Jeavons *et al.* : de manière générale, pour une structure relationnelle $\mathbf{U} = (U, \Sigma)$, la complexité du problème est intimement liée à la structure des morphismes

$$U^n \rightarrow U$$

appelés **polymorphismes** de $\mathbf{U}$;
- **Intuition** : le problème est difficile si la structure est très expressive et n'admet donc peu de polymorphismes.

Adaptation au cas infini

Exemple

- La structure relationnelle $U_{\mathbb{Q}}$:
  - $U_{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble (infini) $\mathbb{Q}$;
  - les huit relations binaires correspondent aux symboles $<, \mathrm{eq}, >, \leq,$ etc.

Soit $N = (N, C)$ un réseau de contraintes sur l'algèbre des instants ; il correspond à une structure relationnelle U_N de même signature :

- l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des sommets ;
- chacun des huit symboles binaires est interprété par un ensemble de couples de sommets ;

Structures relationnelles : application au RQET

- une **instantiation** vérifiant les contraintes est un morphisme de structures relationnelles

$$m : U_N \to U_{\mathbb{Q}}$$

- Bodirsky, Chen, *et al.* ont adapté les techniques de Jeavons *et al.* au cas des structures associées aux formalismes temporels et spatiaux ;
- par exemple, liens entre relation entre k-cohérence forte et cohérence globale et existence de polymorphismes k-aires particuliers (dits *quasi presqu'unanimes*) ;
- techniques appliquées au cas de RCC-5, de l'algèbre d'Allen, etc.

Conclusion et perspectives

- de nombreux formalismes seraient encore à mentionner :
  - calculs de trajectoires (van de Weghe) ;
  - formalismes spatio-temporels (Muller).
- **combinaison de formalismes** : notion de combinaison **étroite** opposée à une combinaison **lâche** (Westphal et Wölfl) :
  - étroite (cf. Meiri) : c'est le cas de INDU ;
  - lâche (cf. Kautz et ladkin) : RCC-8 augmenté d'une notion de taille (Gerevini et Renz) ;
  - dans le cas de combinaison lâche, notion de **bi-clôture algébrique**

Et encore . . .

Il aurait fallu également mentionner :

- D'autres travaux sur les relations d'arité supérieure à 2 ;
- la traduction des problèmes en termes de CSP finis ;
- la traduction des problèmes en termes de SAT ;
- l'existence de bibliothèques logicielles :
  - QAT (Lens) ;
  - SparQ (Brème) ;
  - GQR (Fribourg).

- Merci de votre attention !
- Avez-vous des questions ?