



Images couleur et algèbres géométriques

Patrice Denis

9 Avril 2009



Plan

- Définitions et généralités sur les algèbres géométriques
- Approches spatiales
 - Transformations couleur
 - Détection de contours

Algèbres géométriques

première approche par les algèbres

- Complexes : \mathbb{C} dimension 2, $z = a + b i$

$$i^2 = -1$$

- Quaternion : \mathbb{Q} dimension 4, $q = a + b i + c j + d k$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

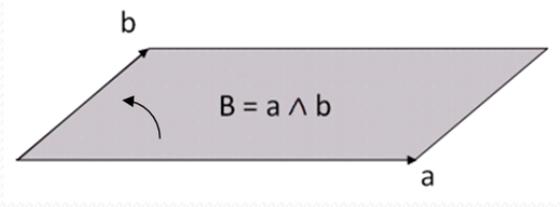
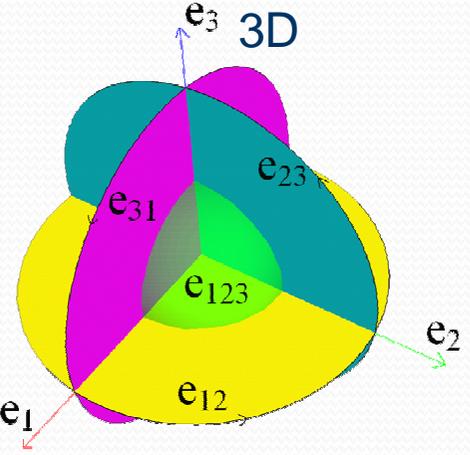
$$ki = -ik = j$$

- Algèbre géométrique : $\mathbb{R}_{3,0}$ dimension 8

$$(e_0, e_1, e_2, e_3, e_{23}, e_{31}, e_{12}, e_{123})$$

Algèbres géométriques - définition

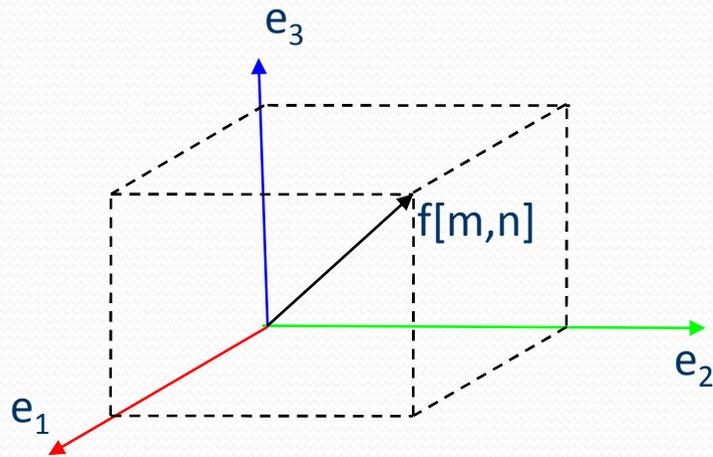
- Connues aussi comme « Algèbres de Clifford »
- Manipuler des entités géométriques, « multivecteurs », comme des nombres d'une algèbre

dimension	1D	2D	3D
représentation			
base	(e_0, e_1)	(e_0, e_1, e_2, e_{12})	$(e_0, e_1, e_2, e_3, e_{23}, e_{31}, e_{12}, e_{123})$

- Exemple dans $R_{3,0}$ ou G_3 : $M = e_0 + 5 e_1 + e_3 - 3 e_{23} + 2 e_{123}$

Représentation des images couleur

- Idée : une couleur = un vecteur de \mathbb{R}^3
- $R_{3,0}$ sur les 3 parties vectorielles :
 - $f[m,n] = r[m,n] e_1 + v[m,n] e_2 + b[m,n] e_3$



m et n : coordonnées spatiales

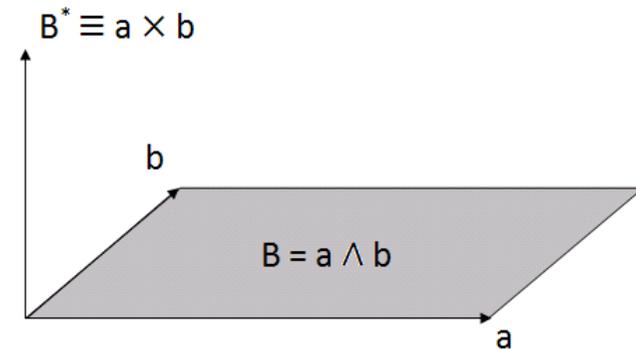
Algèbres géométriques – vocabulaire

- 4 produits : interne $A \rfloor B$, externe $A \wedge B$, scalaire $A \cdot B$, géométrique AB
- Réversion : correspond au conjugué des quaternions

- Norme $|A| = A \cdot \tilde{A} = \sqrt{\langle A\tilde{A} \rangle_0}$

- Inverse $A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\tilde{A}A}$

- Dualité $A^* = A \rfloor \tilde{I}$

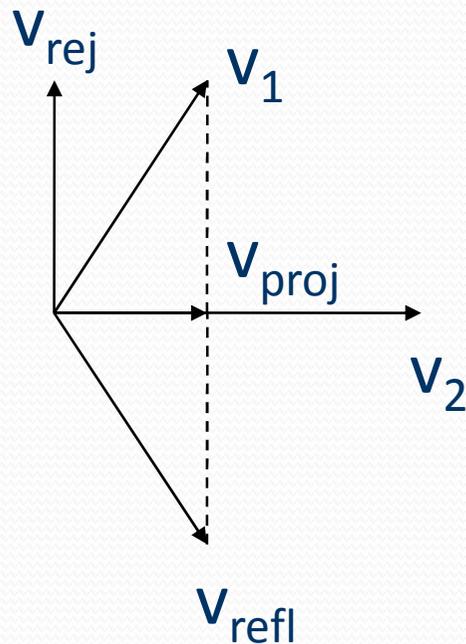


- Propriété des 1-vecteurs : $ab = a \wedge b + a \rfloor b$

Important car les couleurs seront portées par des vecteurs

Transformations géométriques

- Un vecteur v de \mathbb{R}^3 est représenté par le 1-vecteur m



Réflexion :

$$m_{refl} = m_2 m_1 m_2^{-1}$$

Projection :

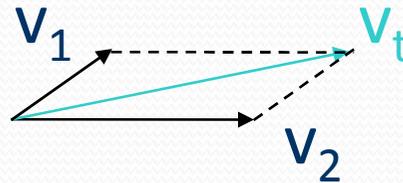
$$m_{proj} = (m_1 \rfloor m_2) m_2^{-1}$$

Réjection :

$$m_{rej} = (m_1 \wedge m_2) m_2^{-1}$$

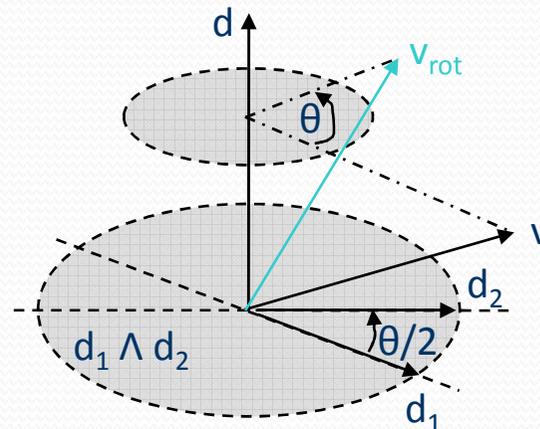
Transformations géométriques

- Un vecteur v de \mathbb{R}^3 est représenté par le quaternion pur q ou le 1-vecteur m



Translation :

$$m_t = m_1 + m_2$$



Rotation :

$$m_{rot} = e^{-J \frac{\theta}{2}} m e^{J \frac{\theta}{2}}$$

$$J = \frac{d_1 \wedge d_2}{|d_1 \wedge d_2|}$$



Plan

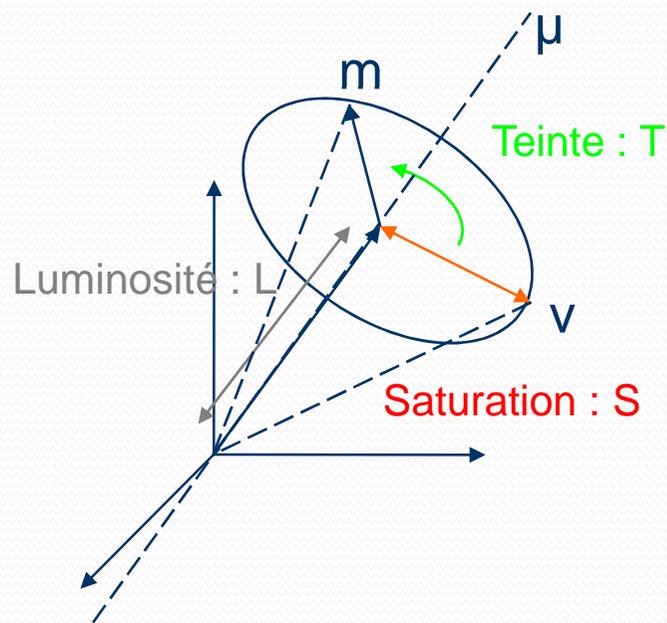
- Définitions et généralités sur les algèbres géométriques
- **Approches spatiales**
 - Transformations couleur
 - Détection de contours

G3 - transformations couleur

- Passage de RVB vers TLS
- Transformations couleur de base sur des images

G3 - transformations couleur

- Teinte : T, Saturation : S, et Luminosité : L



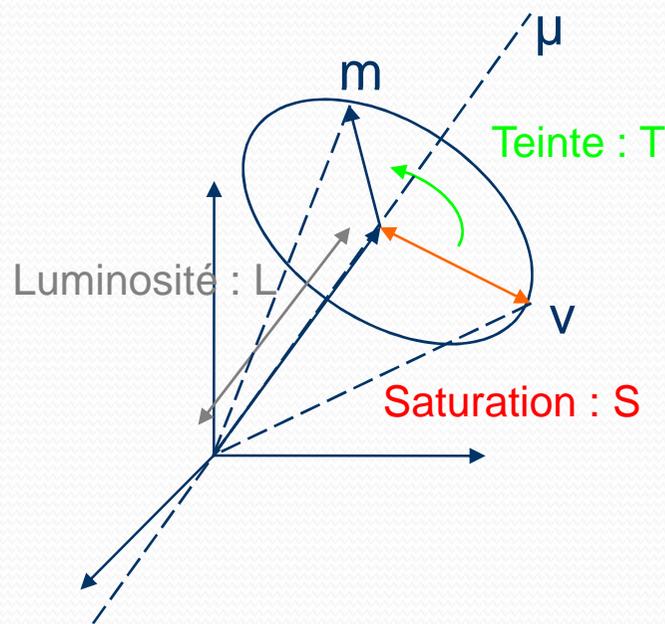
$$\begin{cases} T = \tan^{-1} \frac{|(m \wedge \mu \nu^*)(\mu \nu^*)^{-1}|}{|(m \wedge \nu) \nu^{-1}|} \\ S = |(m \wedge \mu) \mu^{-1}| \\ L = |(m \lrcorner \mu) \mu^{-1}| \end{cases}$$

$\mu = \mu_{\text{gris}}$: axe des niveaux de gris
 ν : vecteur de référence pour $T = 0^\circ$

$$m = L\mu + Se^{\mu^* T} \nu$$

G3 - transformations couleur

- Teinte : T, Saturation : S, et Luminosité : L



$$\begin{cases} r = \frac{L + \sqrt{2}S \cos(T)}{\sqrt{3}} \\ v = \frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{S}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(T)}{\sqrt{3}} - \sin(T) \right) \\ b = \frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{S}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(T)}{\sqrt{3}} + \sin(T) \right) \end{cases}$$

$\mu = \mu_{\text{gris}}$: axe des niveaux de gris
 v : vecteur de référence pour $T = 0^\circ$

$$m = re_1 + ve_2 + be_3$$

G3 - transformations couleur

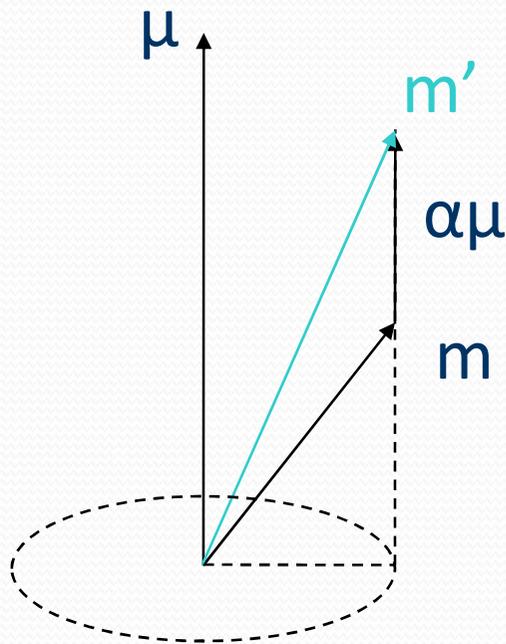
- Passage de RVB vers TLS
- Transformations couleur de base sur des images

G3 - transformations couleur

- Modification de luminosité

$$m' = m + \alpha\mu$$

avant \longrightarrow après



$$m = I\mu + Se^{\mu^*T}\nu$$

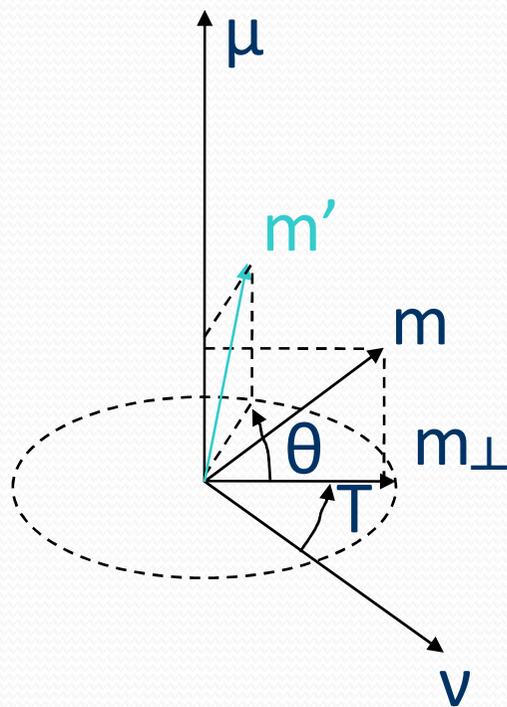
$$m' = (I + \alpha)\mu + Se^{\mu^*T}\nu$$

G3 - transformations couleur

- Modification de teinte

$$m' = e^{-\mu^* \frac{\theta}{2}} m e^{\mu^* \frac{\theta}{2}}$$

avant \longrightarrow après



$$m = I\mu + Se^{\mu^* T} \nu$$



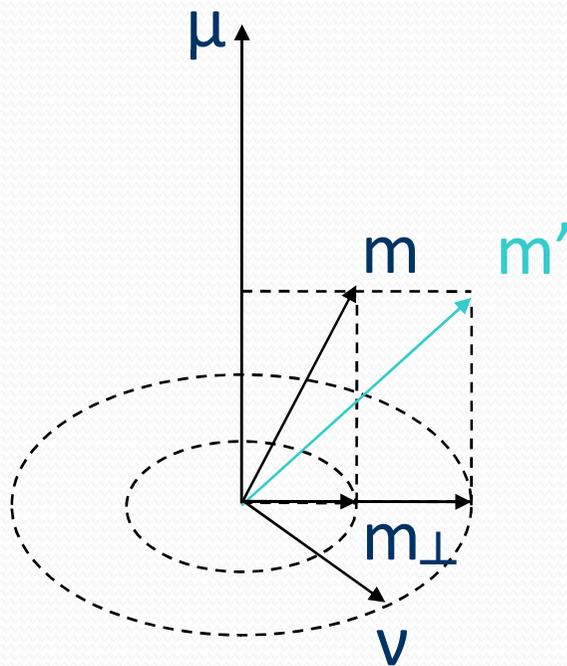
$$m' = I\mu + Se^{\mu^* (T+\theta)} \nu$$

G3 - transformations couleur

- Modification de saturation

$$m' = m + \beta e^{\mu^* T} \nu$$

avant \longrightarrow après



$$m = I\mu + Se^{\mu^* T} \nu$$



$$m' = I\mu + (S + \beta)e^{\mu^* T} \nu$$



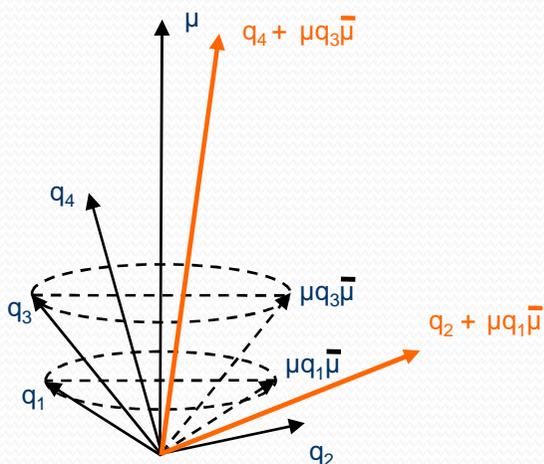
Plan

- Définitions et généralités sur les algèbres géométriques
- Approches spatiales
 - Transformations couleur
 - Détection de contours

Détection de contours

- Approche Sangwine : filtrage de Prewitt sur l'image par convolution (approche quaternionique généralisée avec G_2)
- $Q = e^{\mu\pi/2} = \mu$
- $\mu = \mu_{\text{gris}}$

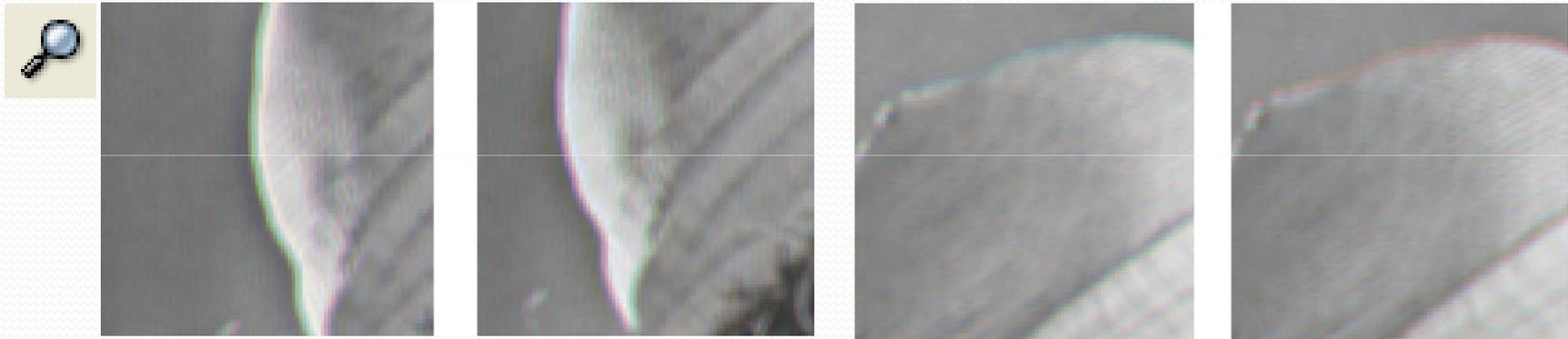
$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ Q & Q & Q \end{bmatrix} * [] * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q} & \bar{Q} & \bar{Q} \end{bmatrix}$$



$$\hat{q}(i, j) = \mathbf{q}(i-1, j-1) + \mu\mathbf{q}(i-1, j+1)\bar{\mu} \\ + \mathbf{q}(i, j-1) + \mu\mathbf{q}(i, j+1)\bar{\mu} \\ + \mathbf{q}(i+1, j+1) + \mu\mathbf{q}(i+1, j+1)\bar{\mu}$$

Les deux vecteurs q_1 et q_2 (resp. q_3 et q_4) sont éloignés (resp. proches) du point de vue colorimétrique, la somme obtenue (vecteurs oranges) aura une forte (resp. faible) saturation.

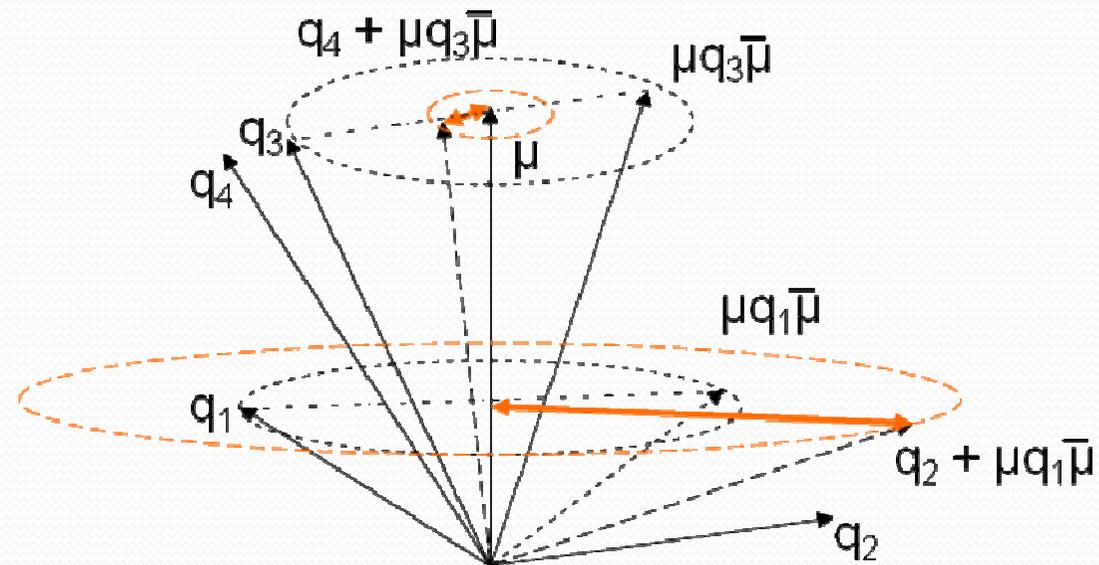
Détection de contours [Sangwine]



Inconvénient : résultats différents suivant le sens d'application du filtre

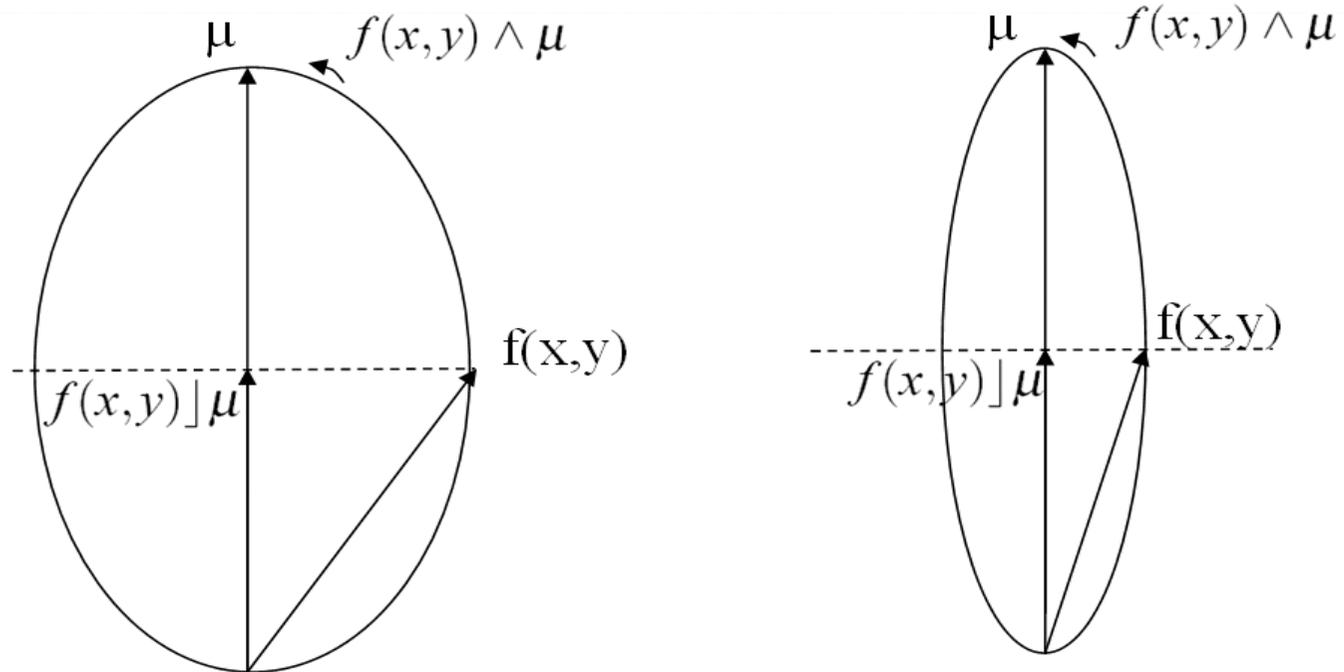
Détection de contours

- extension proposée



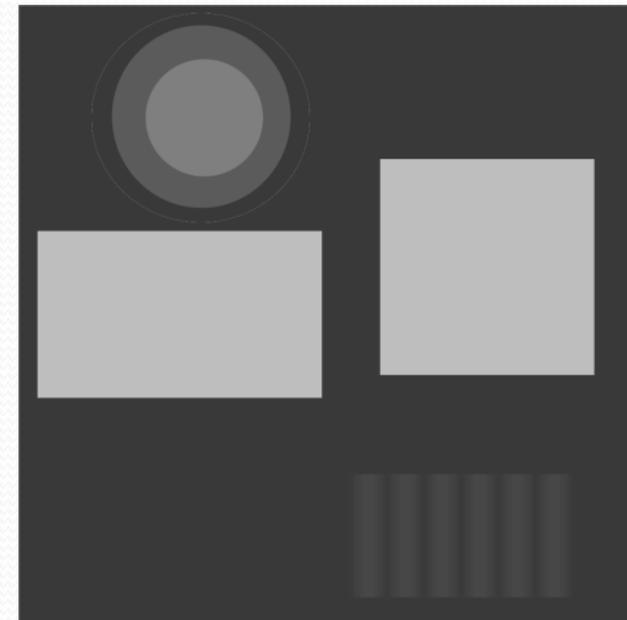
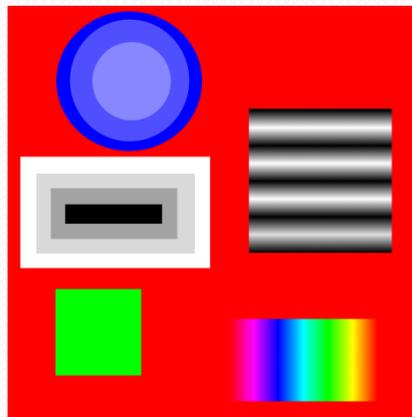
Détection de contours

- Amélioration avec produit géométrique : $f[m, n] \mu$



Détection de contours

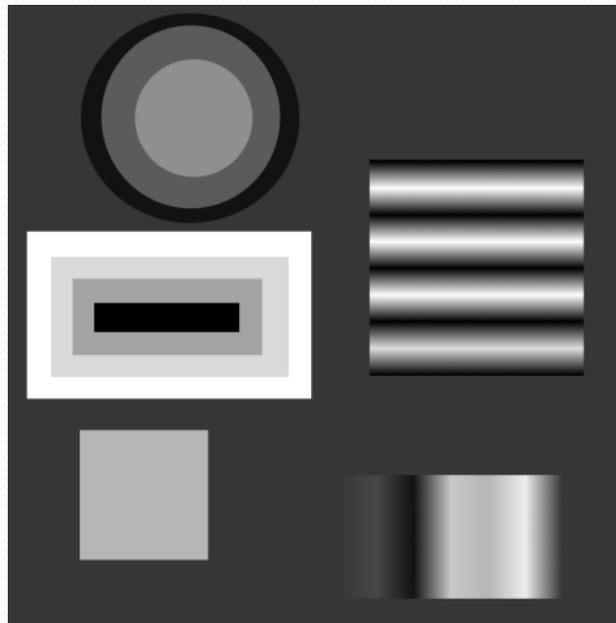
- Norme de la partie bivectorielle



$$f[m, n] \wedge \mu$$

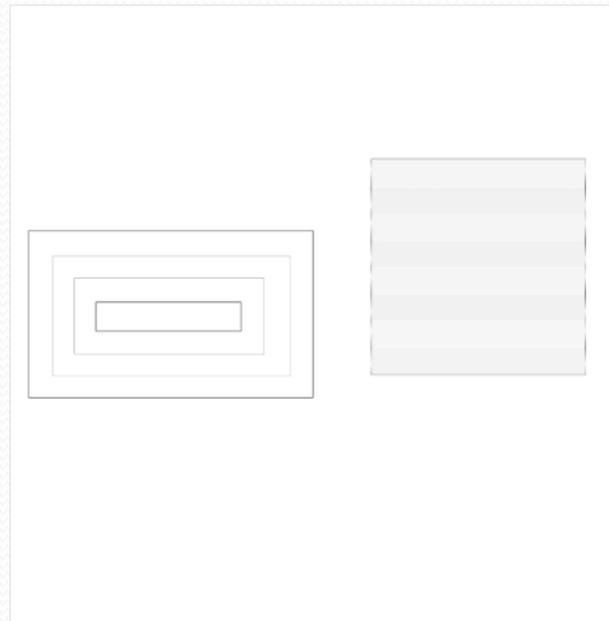
Détection de contours

- Amélioration avec produit géométrique $f[m, n] \mu$
- Partie scalaire $f[m, n] \mu$



Détection de contours

- Filtrage de Prewitt sur partie scalaire
- Pondération par la norme de la partie bivectorielle

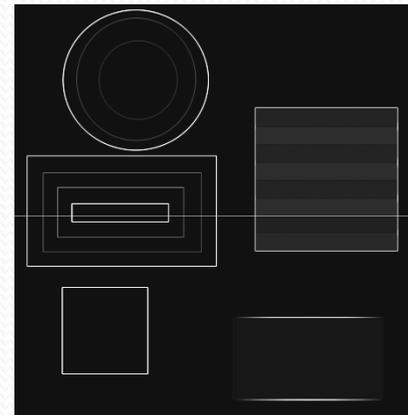
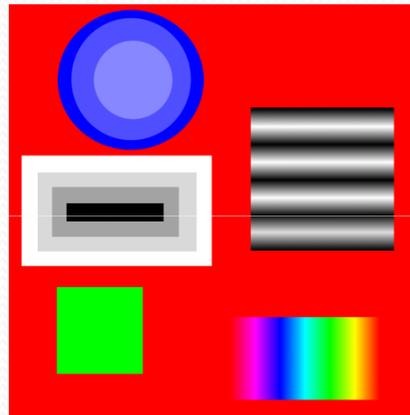


Détection de contours

- Résumé de la méthode :
 - Produit géométrique de chaque pixel avec μ_{gris}
 - Calcul de la norme de la partie bivectorielle
 - Filtrage de Prewitt sur partie scalaire
 - Pondération par la norme de la partie bivectorielle
 - Combinaison avec le gradient de saturation

Détection de contours

- Résultats



Détection de contours

- comparaison

(a) Image originale

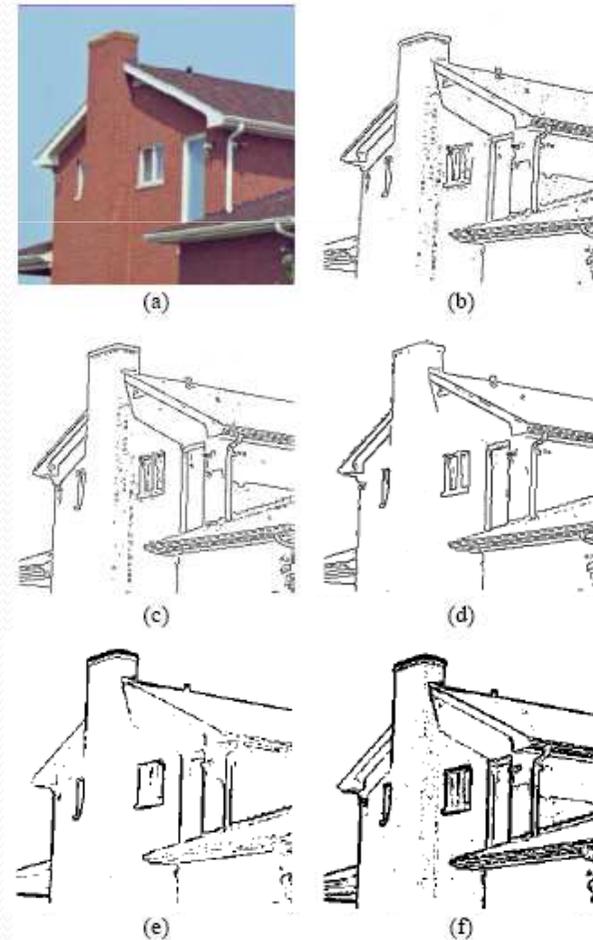
(b) Méthode marginale

(c) Di Zenzo

(d) Carron

(e) Depuis gradient de saturation

(f) Depuis gradient final



Conclusions

- Travaux récents pas beaucoup d'applications
- Formalisation d'opérations géométriques sur les couleurs
- Conversion de l'information RVB en TLS de manière algébrique
- Transformation de base des images couleur
- Définition de schémas de filtrage



Perspectives

- Applications bas niveau
- Extension des schémas de filtrage spatiaux (Carron)
- Caractérisation des autres espaces couleur
- Union et Intersection
 - Morphologie mathématique
 - Agregation de caractéristiques : Indexation